

Physique des particules

Introduction aux concepts et au formalisme
du modèle standard

Benoît Clément

Maître de conférences à l'université Grenoble Alpes

2^e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © Klavdiya Krinichnaya/shutterstock.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocollage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2013, 2017
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-077183-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	VII
Chapitre 1 Particules et interactions	1
1. La matière ordinaire	1
2. Outils formels	4
3. D'autres particules	5
4. Le modèle standard	10
L'essentiel	14
Entraînez-vous	15
Chapitre 2 Notions de physique moderne	17
1. Relativité restreinte	17
2. Mécanique analytique	24
3. Mécanique quantique	30
L'essentiel	37
Entraînez-vous	38
Chapitre 3 Seconde quantification	41
1. Ensemble de particules identiques	41
2. Représentation des états d'occupation	44
3. Opérateurs de création et d'annihilation	45
4. Construction d'opérateurs	48
5. Opérateurs de champ	50
L'essentiel	53
Entraînez-vous	54
Chapitre 4 Champs quantiques libres	55
1. Champ scalaire	56
2. Champ spinoriel	59
3. Champ vectoriel	64
4. Spin et représentations	66
5. Quantification du champ	68
L'essentiel	72
Entraînez-vous	73

Chapitre 5 Champs en interaction	75
1. Interaction de jauge	75
2. Brisure spontanée de symétrie	78
3. Le lagrangien du modèle standard	82
L'essentiel	87
Entraînez-vous	88
Chapitre 6 Diagrammes de Feynman	89
1. Processus de diffusion	89
2. Calcul des éléments de matrice	94
3. Règles et diagrammes de Feynman	98
4. Les vertex du modèle standard	102
5. Renormalisation	105
L'essentiel	109
Entraînez-vous	110
Chapitre 7 Le zoo des hadrons	113
1. Classification des hadrons	113
2. Modèle des quarks	120
3. Chromodynamique quantique	124
L'essentiel	128
Entraînez-vous	129
Chapitre 8 Oscillations de neutrinos	131
1. Caractéristiques des neutrinos	131
2. Mécanisme d'oscillation	133
3. Oscillations à trois familles	136
L'essentiel	139
Entraînez-vous	140
Au-delà du modèle standard	141
Quelques particules	147
Solutions	155
Bibliographie	179
Index	181

Avant-propos

La physique des particules est une science récente. La première particule, au sens moderne du terme, fut l'électron découvert en 1897 et le formalisme théorique permettant de décrire correctement les différentes observations expérimentales n'a trouvé sa forme actuelle que dans les années 1970 comme une extension à la fois de la théorie quantique et de la relativité restreinte.

Cet ouvrage vise à présenter une vision moderne de la physique des particules de manière abordable mais sans occulter les concepts formels sur lesquels elle repose. L'exposé présuppose que le lecteur soit familier avec les concepts de la mécanique analytique, de la mécanique quantique et de la relativité, qui seront brièvement rappelés au chapitre 2. Nous décrirons ainsi les lagrangiens pour des particules libres (chapitres 3 et 4), le principe d'invariance de jauge conduisant au lagrangien d'interaction ainsi que le mécanisme de brisure spontanée de symétrie, introduisant le mécanisme de Higgs (chapitre 5). À chaque étape, nous nous limiterons au cas le plus simple, ce qui nous permettra de nous affranchir des concepts de théorie des groupes et de calcul tensoriel. Avec ce formalisme allégé nous pourrons néanmoins illustrer les principaux concepts théoriques. L'extension au modèle standard complet serait formellement plus complexe mais ne repose sur aucune nouvelle idée. Le chapitre 6 se consacrera aux principes du calcul des observables physiques dans les processus de diffusion, toujours en se limitant au cas le plus simple pour illustrer les concepts. Enfin les deux derniers chapitres traiteront de deux aspects particuliers de la physique des particules : les états liés de l'interaction forte au chapitre 7 et la physique des neutrinos au chapitre 8.

L'essentiel du contenu de cet ouvrage repose sur des cours donnés en première et seconde années de master de physique fondamentale à l'Université Joseph Fourier de Grenoble. Il n'existerait pas sans la contribution de nombreux collègues du Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie (LPSC). Je tiens particulièrement à remercier Arnaud Lucotte qui a patiemment relu ce document, ainsi que Michael Klasen, Ingo Schienbein et Yannick Arnoud.

Introduction

Dans toute étude physique, il est essentiel de commencer par définir le système à décrire. Dans notre cas, il s'agit de définir ce que sont les particules et leurs interactions. La nature du système physique va également imposer le cadre formel dans lequel un modèle théorique pourra être développé. En partant de la structure de la matière ordinaire et en ajoutant d'autres particules découvertes tout au long du XX^e siècle, nous allons ainsi tracer les contours du modèle standard de la physique des particules.

Objectifs

- Connaître** les particules et interactions du modèle standard.
- Identifier** le cadre théorique dans lequel décrire la physique des particules.
- Définir** le système physique étudié ainsi que le système d'unités approprié.
- Expliquer** la construction historique de la physique des particules.

Plan

- 1 La matière ordinaire
- 2 Outils formels
- 3 D'autres particules
- 4 Le modèle standard

1

La matière ordinaire

1.1 Particules et interactions

La matière qui nous entoure est composée d'atomes en interaction les uns avec les autres. Il existe une centaine d'espèces chimiques différentes et cette multiplicité s'explique par une sous-structure : au cœur de l'atome le noyau est composé de protons, chargés positivement, et de neutrons, neutres comme leur nom l'indique. Ce noyau est entouré d'un cortège d'électrons, chargés négativement, en même nombre que les protons pour assurer la neutralité électrique de l'atome. Toute la matière ordinaire est ainsi composée de trois briques fondamentales : p , n et e^- . Elles possèdent toutes un moment cinétique intrinsèque de spin $J = \frac{1}{2}$. Ce sont donc des fermions qui vérifient le principe d'exclusion de Pauli. Ce principe postule que deux fermions ne peuvent occuper le même état quantique et permet ainsi d'assurer l'existence de matière.

L'essentiel de la physique de la matière (physique atomique, physique de la matière condensée, chimie) est gouvernée par une unique interaction, l'électromagnétisme. Dans sa formulation classique cette interaction est décrite par un champ électromagnétique dont l'évolution suit les équations de Maxwell. La théorie quantique unifie les concepts classiques de particule et de champ, en un unique objet que nous continuerons d'appeler « particule » par la suite. Ainsi, la quantification du champ électromagnétique se traduit sous la forme d'une nouvelle particule, le photon γ . C'est une particule de spin $J = 1$, soit un boson.

La physique nucléaire, qui s'intéresse aux propriétés du noyau atomique, nécessite d'introduire deux interactions (ou forces) supplémentaires :

- L'interaction nucléaire forte assure la cohésion du noyau. Ce dernier étant composé uniquement de charges électriques positives et nulles devrait naturellement se dissocier sous l'effet de la répulsion coulombienne. La stabilité du noyau (et donc de la matière) ne peut alors s'expliquer que s'il existe une autre interaction attractive entre neutrons et protons. Cette force doit avoir une intensité supérieure à celle de l'interaction électromagnétique, d'où son nom d'interaction forte.
- L'interaction nucléaire faible est responsable de la désintégration de certains noyaux. Cette désintégration change un proton en neutron et inversement, ce qui n'est possible ni par interaction électromagnétique ni par interaction forte. Il faut donc une troisième force, l'interaction faible, pour décrire ces phénomènes.

Ces deux interactions n'ont aucune influence, ni à l'échelle macroscopique ni même à l'échelle atomique. Ce sont des interactions à courte portée (de l'ordre de la taille du noyau, voire plus petite), alors que l'interaction électromagnétique a une portée infinie.

Une dernière interaction décrit la dynamique des corps massifs : la gravitation. En se limitant à une approche classique, on peut comparer les forces électromagnétique et gravitationnelle entre deux électrons de masse $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg et de charge $q_e = -1,6 \times 10^{-19}$ C :

$$\frac{F_{\text{gravitation}}}{F_{\text{électrique}}} = \frac{\frac{Gm_e^2}{r^2}}{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}} = \frac{G m_e^2 4\pi\epsilon_0}{q^2} \approx 4 \times 10^{-42}, \quad (1.1)$$

où $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m².kg⁻² est la constante de gravitation de Newton et $\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \approx \frac{1}{137}$ est la constante de structure fine, qui caractérise l'intensité de l'interaction électromagnétique. L'intensité de la force électromagnétique est 42 ordres de grandeur plus forte que celle de la gravitation. Aux échelles d'énergie qui concernent la physique des particules, les effets gravitationnels sont complètement négligeables.

Le modèle standard de la physique des particules que nous allons présenter dans cet ouvrage se limitera donc à la description des interactions électromagnétique, faible et forte entre particules élémentaires. Ce modèle est incomplet puisqu'il n'inclut pas

la gravitation. Cette dernière est décrite par la théorie de la relativité générale dont le formalisme est incompatible avec celui de la mécanique quantique.

1.2 Longueur, énergie et élémentarité

L'étude expérimentale d'un objet et la mesure de ses propriétés requièrent l'usage d'une sonde dont la longueur d'onde est comparable à la dimension de l'objet étudié. La sonde la plus couramment utilisée est la lumière ou plus généralement l'onde électromagnétique. On peut remonter à la forme et aux propriétés d'une structure en observant la diffusion de la lumière, l'application première étant bien entendu la vision qui reconstruit une image à partir de la lumière visible diffusée. Ce principe se généralise sans difficulté à d'autres échelles de distance et d'autres sondes (électrons, protons,...). Pour pouvoir étudier une structure avec une sonde donnée il faudra :

- que l'énergie de la sonde ou sa longueur d'onde soit comparable à la dimension caractéristique de l'objet étudié ;
- que la sonde puisse interagir avec la structure étudiée afin qu'il y ait diffusion.

À toute échelle de longueur λ , on peut associer une échelle d'énergie caractéristique E à partir de la relation de de Broglie :

$$E = \frac{\hbar c}{\lambda}. \quad (1.2)$$

Pour étudier des objets physiques de taille $\lambda = 10^{-15}$ m (rayon classique du proton), il faut disposer d'une sonde d'énergie au moins égale à 3×10^{-11} J ≈ 200 MeV. On utilise généralement comme unité d'énergie l'électronvolt (eV) défini comme l'énergie acquise par une charge élémentaire sur une distance $L = 1$ m dans un champ électrique uniforme $E = 1$ V.m. On a alors :

$$E = \frac{qV}{L} \Rightarrow 1 \text{ eV} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V.m}}{1 \text{ m}} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (1.3)$$

En physique des particules, on sonde l'infiniment petit en réalisant des expériences de diffusion à haute énergie, soit en envoyant un faisceau de particules (électrons, protons, photons) de grande énergie cinétique sur une cible, soit en collisionnant deux faisceaux. Dans ce dernier cas, la sonde et la structure sondée peuvent avoir la même nature et la différentiation n'a plus de sens.

La notion d'élémentarité d'une particule n'a de sens que relativement à l'échelle d'énergie du processus : une particule est élémentaire dans une diffusion si son énergie caractéristique est grande devant celle du processus. Par exemple, lors d'une désintégration α , l'énergie échangée est de l'ordre de 5 MeV alors que la particule α a un diamètre classique d'environ 2 fm soit $E \approx 90$ MeV : la particule α peut être considérée comme élémentaire. Les particules que l'on va considérer comme élémentaires en physique des particules sont celles qui n'ont pas de structure connue à ce jour, c'est-à-dire pour lesquelles il n'y a aucune évidence de l'existence de sous-structure aux échelles d'énergie accessibles en laboratoire. À titre indicatif, l'accélérateur de particules de plus

haute énergie atteint une énergie de 10 TeV dans le centre de masse, correspondant à une longueur caractéristique d'environ 10^{-20} m.

La physique des particules s'intéresse à la description des objets physiques plus petits que le noyau atomique. Ceci concerne deux échelles de taille. La première, autour de 10^{-15} m, est celle des constituants du noyau (le proton et le neutron) auxquels viendront s'ajouter toute une zoologie de nouvelles particules de courte durée de vie. La seconde, plus petite que 10^{-16} m, est celle des particules élémentaires, c'est-à-dire celle dont on ne connaît aucune sous-structure interne. On verra ainsi que neutrons et protons sont composés de quarks, alors que l'électron est déjà élémentaire. Là encore de nouvelles particules similaires mais instables viendront s'ajouter aux briques de la matière ordinaire.

2 Outils formels

2.1 Unités naturelles

La mécanique quantique et la relativité restreinte font chacune intervenir une constante fondamentale qui intervient dans la plupart des équations : la constante de Planck \hbar et la célérité de la lumière c . Dans les unités du système international :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05457148 \times 10^{-34} \text{ J.s} \text{ et } c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}. \quad (1.4)$$

Ces constantes sont des caractéristiques de notre univers. Elles relient entre elles des grandeurs ayant des dimensions différentes : temps, espace, énergie et quantité de mouvement :

$$\begin{array}{ccc} \text{Énergie, } E & \xleftrightarrow[E=\hbar\omega]{\hbar} & \text{Pulsation, } \omega \sim \frac{1}{T} \\ c \quad \uparrow \quad E = pc & & c \quad \uparrow \quad \lambda = \frac{c}{\omega} \\ \text{Impulsion, } p & \xleftrightarrow[p=\frac{\hbar}{\lambda}]{\hbar} & \text{Longueur d'onde, } \lambda \end{array}$$

L'existence de ces constantes fondamentales semble indiquer que ces grandeurs (ou leur inverse) auraient la même dimensionnalité. Il n'y aurait alors besoin que d'une unique dimension. De même, la valeur numérique de ces constantes ne résulte que d'un choix arbitraire d'un système d'unités.

Le système d'**unités naturelles** est celui où ces deux constantes valent 1 et n'ont pas de dimension. Dans ce système d'unités les équations sont simplifiées puisque les facteurs c ou \hbar disparaissent. À partir d'une analyse dimensionnelle on montre que :

$$[\hbar] = E \cdot T = 1 \Rightarrow T = E^{-1}, \quad (1.5)$$

$$[c] = L T^{-1} \Rightarrow L = T. \quad (1.6)$$

Le temps et l'espace ont la même dimension, ce qui semble naturel puisque la relativité va traiter le temps comme une quatrième coordonnée. De plus, toutes les dimensions

s'expriment en unités naturelles comme des puissances de l'énergie. Ainsi temps et espace ont la dimension inverse de l'énergie. À partir des valeurs de \hbar et c dans les deux systèmes d'unités, on détermine les facteurs de conversion pour le mètre et la seconde (voir exercice 1.1) :

$$1 \text{ m} = 5,07 \times 10^6 \text{ eV}^{-1} \text{ et } 1 \text{ s} = 1,52 \times 10^{15} \text{ eV}^{-1}. \quad (1.7)$$

Une autre grandeur utile pour les conversions entre systèmes d'unités est $\hbar c \approx 197 \text{ MeV.fm}$.

2.2 Contexte théorique

Une théorie de la physique des particules doit pouvoir décrire des interactions où la nature et le nombre des particules varient : ceci n'est pas possible dans le cadre usuel de la mécanique quantique où la fonction d'onde, associée à une probabilité de présence dans l'espace, ne peut pas décrire de tels systèmes. C'est le formalisme de la seconde quantification et de l'espace de Fock qui permet de traduire ce type de phénomènes. Il sera décrit au chapitre 3.

Les particules étudiées peuvent avoir une vitesse très élevée, proche ou égale à celle de la lumière, ce qui implique que la théorie de la physique des particules doit intégrer la relativité restreinte.

Enfin, on souhaite une théorie qui intègre l'électromagnétisme et donc le concept de champ. L'approche formelle de l'électromagnétisme passe par la théorie des champs, qui est une extension de la mécanique analytique. La théorie des champs classique de l'électromagnétisme inclut naturellement la relativité restreinte qui permet un traitement quasi identique des coordonnées d'espace et de temps dans les équations. En revanche la mécanique quantique décrit l'évolution temporelle d'une fonction d'onde, normalisée sur l'espace. L'unification de ces deux théories, qui présentent des approches radicalement différentes de l'espace-temps, n'est pas aisée. Une simple théorie de mécanique quantique relativiste fait rapidement apparaître des incohérences qui ne peuvent se résoudre que dans un formalisme plus vaste, celui de la théorie quantique des champs. Nous donnerons, dans les chapitres 3 à 6, un aperçu de ce formalisme et de son application à la physique des particules.

En plus des particules de la matière ordinaire, d'autres objets sont venus s'ajouter à la liste, parfois comme découverte expérimentale qu'il faut inclure dans le modèle, parfois en tant que conséquence des modèles théoriques qui prévoient de nouveaux objets. Ces particules sont par nature instables puisqu'absentes de la matière ordinaire.

3.1 Interaction et bosons massifs

L'interprétation du champ électromagnétique en tant que particule est le photon. L'interaction, c'est-à-dire l'échange d'énergie ou d'impulsion entre deux charges, s'opère par l'échange d'un photon de masse nulle. Le potentiel pour une source statique est solution de l'équation de Laplace¹ :

$$\Delta V = 0 \implies V = \frac{g}{r}, \quad (1.8)$$

où r est la distance à la source et g une constante numérique qui va quantifier l'intensité de l'interaction. La portée d'une telle interaction est infinie, avec une décroissance inverse à l'éloignement des charges en interaction.

Les interactions faible et forte devraient également faire intervenir un équivalent au photon. Néanmoins, pour prendre en compte la courte portée de ces interactions, ces « photons » doivent être massifs. L'émission d'une telle particule par une charge statique viole la conservation de la masse, mais est autorisée en mécanique quantique tant que le principe d'incertitude d'Heisenberg n'est pas satisfait ($\Delta E \Delta t \leq \hbar$), c'est-à-dire tant que le temps d'interaction τ est inférieur à $\frac{m}{\hbar c^2}$, le phénomène n'est pas observable et donc autorisé. Cette durée limitée se traduit par une portée limitée de l'interaction de l'ordre de $\lambda = \frac{m}{\hbar c}$.

Ceci peut se formuler plus rigoureusement en quantifiant la relation relativiste entre énergie et impulsion (voir également chapitre 4) :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \xleftarrow[E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \vec{p} \rightarrow i\hbar \vec{\nabla}]{\text{Quantification}} \square \psi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (1.9)$$

On obtient l'équivalent relativiste de l'équation de Schrödinger : l'équation de Klein-Gordon. Pour un système statique et un boson sans masse, on retrouve l'équation de Laplace. On remarque, dans ce cas, que la fonction d'onde du photon dans l'équation de Klein-Gordon correspond au potentiel électrostatique. Pour un vecteur d'interaction massif, le potentiel statique devient solution de l'équation :

$$\Delta U = \frac{mc^2}{\hbar} U. \quad (1.10)$$

Pour un potentiel ne dépendant que de la coordonnée radiale, $U(r)$, on résout cette équation en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{mc^2}{\hbar} U \implies U(r) = \frac{g}{r} e^{-r/R}, \quad (1.11)$$

1. On rappelle quelques opérateurs différentiels usuels : l'opérateur vectoriel nabla ou gradient $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, le laplacien $\Delta = \vec{\nabla}^2$ et le d'alembertien $\square = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta$.

où $R = \frac{\hbar}{mc}$ est la portée de l'interaction. Ce potentiel, dit potentiel de Yukawa, tombe rapidement à zéro pour des distances supérieures à quelques R à cause du facteur exponentiel. Un « photon » massif va permettre de décrire une interaction de courte portée, cette portée étant égale à l'inverse de la masse du « photon ».

La portée caractéristique de l'interaction forte dans le noyau est de l'ordre du fermi (10^{-15} m, taille du noyau). La masse du vecteur doit alors être de l'ordre de la centaine de MeV. Il existe effectivement trois particules, les pions, qui sont des bosons de masse $m_\pi \approx 140$ MeV correspondant au boson prédit par Yukawa. Nous discuterons par la suite du fait que ce pion n'est pas le véritable équivalent du photon pour l'interaction forte.

Pour l'interaction faible, la durée de vie de certaines particules appelées hypérons, qui ne peuvent se désintégrer que par interaction faible (voir chapitre 7), donne une indication de la masse du vecteur de l'interaction faible. Cette durée de vie est de l'ordre de 10^{-12} s, soit une masse de l'ordre de la centaine de GeV. C'est effectivement la masse des bosons W^+ , W^- et Z qui véhiculent l'interaction faible.

3.2 Antiparticules

L'équation relativiste de Klein-Gordon, décrite au paragraphe précédent, découle d'une relation quadratique entre énergie, masse et impulsion. De ce fait, la résolution de cette équation conduit à deux types de solutions en onde plane d'impulsion \vec{k} de la forme :

$$\psi(\vec{x}, t) \propto e^{\pm c\omega_k t - i\vec{k}\vec{x}}, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (1.12)$$

avec des énergies positive et négative respectivement. Les solutions d'énergie négative n'ont *a priori* aucun sens physique. Ce résultat avait été dérivé par Erwin Schrödinger, qui n'avait alors publié que l'équation non relativiste qui porte son nom. Paul Dirac apporta une solution à ce problème en interprétant ces solutions négatives comme des antiparticules. L'astuce mathématique consiste à absorber le signe "-" du $-\omega_k t$ dans le temps plutôt que dans ω_k . Ainsi une antiparticule est équivalente à une particule qui remonte le temps, avec une énergie positive. Une antiparticule possède la même masse et le même spin que la particule correspondante, mais tous ses nombres quantiques additifs ou charges sont inversés.

3.3 Rayons cosmiques

À ce stade de notre exposé, il est utile de faire un petit historique de la découverte des premières particules. L'électron fut la première particule subatomique observée par Thompson en 1897. Suivirent le proton (1912) puis le neutron (Chadwick, 1932). L'observation de particules ne composant pas la matière ordinaire s'avérera plus délicate. Nous verrons par la suite que pour fabriquer de telles particules il faut réaliser des collisions mettant en jeu une énergie cinétique au moins égale à l'énergie de masse ($E = mc^2$) de la particule à produire. De telles collisions sont réalisées naturellement

par le rayonnement cosmique. En 1912, à l'aide d'un ballon, Victor Hess démontre que l'ionisation de l'atmosphère augmentait avec l'altitude. Il en conclut que l'atmosphère terrestre subissait un bombardement constant de particules provenant de l'espace. Ces particules constituent le rayonnement cosmique primaire, dont on sait aujourd'hui qu'il est composé à 99% de protons (90%), de noyaux d'hélium et d'électrons. Les particules primaires, en interagissant avec l'atmosphère, sont susceptibles de produire ces nouvelles particules, que l'on peut détecter au niveau du sol.

C'est ainsi que l'antiélectron ou positron fut mis en évidence comme une particule de même masse que l'électron mais ayant une charge opposée (tournant dans le sens inverse d'un électron dans un même champ magnétique), confirmant ainsi l'interprétation des solutions d'énergie négative des équations de la mécanique quantique relativiste.

En 1936 une particule de masse $m = 105$ MeV et de charge électrique ± 1 fut identifiée dans le rayonnement cosmique. Elle fut un temps assimilée au pion du modèle de Yukawa (« photon » massif de l'interaction forte) Néanmoins, si la masse semblait correspondre, cette particule interagissait très peu avec les noyaux, au contraire de ce qui est attendu pour le pion. Cette particule ressemblait en tout point à un électron ou un positron, en plus massif : il s'agit du muon (μ^-) et de l'antimuon (μ^+).

Les véritables pions π^\pm ainsi qu'un troisième état neutre π^0 furent également identifiés par la suite dans le rayonnement cosmique.

Deux types de découvertes apparaissent ici : d'une part des particules qui étaient attendues dans le cadre des théories de l'époque (positron, pion) confirmant ces modèles, d'autre part des particules inattendues (muon) qui viennent s'ajouter à un bestiaire en pleine expansion.

3.4 Hadrons, quarks et interaction forte

À la suite de la découverte du pion, de nombreuses autres particules liées à l'interaction forte, **les hadrons**, furent observées, principalement en réalisant des collisions proton-proton ou pion-proton. L'étude des différentes interactions entre hadrons a mis en évidence une grandeur additive conservée, le nombre baryonique B . Ainsi, parmi les hadrons on distingue :

- **les baryons** de spin demi-entier (fermions) tels le proton et le neutron qui ont un nombre baryonique $B = 1$;
- **les mésons** de spin entier (bosons) tels les pions (π^\pm , π^0) qui ont un nombre baryonique $B = 0$.

Avec trois particules élémentaires (neutron, proton et électron) on peut expliquer la grande multiplicité d'atomes et de noyaux ainsi que leurs propriétés physiques et chimiques. Par analogie, le grand nombre de hadrons découverts semble indiquer une nature composite : soit il existe quelques hadrons fondamentaux, les autres étant alors des états liés excités de ces hadrons, soit tous les hadrons sont composés de briques élémentaires plus petites. C'est cette dernière solution qui s'avère correcte.

Ces composants, **les quarks**, sont au nombre de six. Trois quarks dits de type *up* (*up* u , *charm* c et *top* t) possèdent une charge électrique $\frac{2}{3}$, les trois autres dits de type *down* (*down* d , *strange* s et *bottom* b) ont une charge $-\frac{1}{3}$. Les hadrons sont des états liés de quarks, trois quarks pour les baryons, un quark et un antiquark pour les mésions. Seuls les deux quarks les plus légers, u et d , composent la matière ordinaire. En regardant la charge électrique, un proton est un état lié uud et un neutron correspond à udd . Les propriétés des hadrons et des quarks seront discutées plus en détail au chapitre 7.

L'interaction forte entre quarks se décrit par un formalisme voisin de l'électromagnétisme. Au lieu d'une unique charge électrique, les quarks portent une charge dite de couleur (généralement rouge, vert ou bleu) et les antiquarks, la charge d'anticouleur correspondante. Il existe donc trois quarks u différents, un par couleur. La théorie de l'interaction forte porte le nom de chromodynamique quantique ou QCD. L'équivalent du photon est le gluon, mais ce dernier porte la charge de l'interaction forte. Il existe de fait huit types de gluons portant couleur et anticolour. Le gluon étant chargé, il peut également interagir avec lui-même, entraînant une phénoménologie très différente de l'électromagnétisme. En particulier, l'intensité de l'interaction croît avec la distance (l'électromagnétisme décroît en $\frac{1}{r^2}$). Pour cette raison, les quarks ne peuvent exister que dans des états liés globalement neutres et il est impossible d'observer un quark libre. Les hadrons sont donc des objets neutres de couleur obtenus en combinant soit couleur et anticolour (rouge et antirouge, par exemple) pour les mésions, soit chacune des trois couleurs pour les baryons. L'interaction nucléaire forte, décrite par l'échange de pion dans le modèle de Yukawa, n'est en fait qu'un effet résiduel de l'interaction entre quarks, à l'image des liaisons électromagnétiques de van der Waals entre atomes neutres.

Puisqu'il ne peut pas exister de quark libre (à l'exception du quark top), la masse d'un quark n'est pas un objet très bien défini. Néanmoins, on estime que la masse des quarks u et d est de l'ordre de quelques MeV. Le proton et le neutron ayant une masse d'environ 940 MeV, on en déduit que plus de 98% de la masse de la matière ordinaire résulte de l'énergie de liaison entre quarks.

3.5 Interaction faible

La désintégration β d'un noyau de numéro atomique Z (nombre de protons) et contenant A nucléons (nombre de protons et de neutrons) vers un noyau plus léger transforme un neutron en proton (β^-) ou un proton en neutron (β^+), avec émission respectivement d'un électron ou d'un positron. On observe ainsi :

$$_Z^AX \rightarrow _{Z\pm 1}^AY + e^\mp.$$

Ni l'interaction électromagnétique, ni l'interaction forte ne sont susceptibles de changer la nature des particules. Il faut donc imaginer une troisième interaction, l'interaction nucléaire faible, qui n'a pas d'influence à longue distance. Selon le modèle de Yukawa, ceci est possible avec des vecteurs massifs, les bosons W^+ et W^- .

En plus de ces nouveaux bosons, il faut également considérer un fermion supplémentaire pour expliquer les désintégrations β . Dans une désintégration à deux corps, l'électron doit être monoénergétique du fait de la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Or c'est un spectre continu en énergie qui est mesuré, allant de 0 à l'énergie attendue pour une désintégration à deux corps. Ceci est caractéristique d'une désintégration à trois corps, avec une troisième particule de masse nulle (ou négligeable devant la masse de l'électron). La conservation de la charge électrique impose que cette troisième particule soit neutre. Puisqu'elle n'est pas détectée, cette particule n'interagit pas par interaction forte, mais uniquement par interaction faible. On ajoute donc un neutrino dans la désintégration β^+ et un antineutrino pour β^- . Ce sont les caractéristiques du neutrino proposé par Wolfgang Pauli en 1933. La désintégration β devient alors :

$$\beta^+ : {}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + e^+ + \nu_e, \quad \beta^- : {}_Z^A X \rightarrow {}_{Z+1}^A Y + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Au niveau fondamental, l'échange d'un boson W^\pm transforme :

$$u \rightarrow dW^+, \quad d \rightarrow uW^-, \quad e \rightarrow \nu_e W^-, \quad \nu_e \rightarrow e^- W^+.$$

On parle d'interaction faible par courants chargés, puisque les bosons W^\pm portent une charge électrique.

Pour décrire l'interaction faible dans un formalisme similaire à l'interaction électromagnétique ou à l'interaction forte, il est nécessaire d'introduire un troisième boson faible massif, de charge électrique nulle, le Z . On parle alors d'interaction par courants neutres, qui fut mis en évidence en 1973 par l'observation de la diffusion d'un neutrino sur un électron $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ dans la chambre à bulles Gargamelle au CERN, près de Genève.

4

Le modèle standard

Le modèle standard de la physique des particules est un modèle théorique décrivant l'interaction entre différents fermions par l'échange de bosons médiateurs des interactions électromagnétique, faible et forte. Ce modèle repose sur le formalisme de la théorie quantique des champs. Les interactions entre fermions sont introduites au moyen de l'invariance de jauge locale en imposant des symétries particulières aux équations du mouvement. La masse des particules résulte d'un mécanisme de brisure d'une partie de ces symétries : le mécanisme de Higgs. Les chapitres 3 à 6 vont donner une description des principales idées de ces théories, avant de présenter de manière plus complète la compréhension moderne du modèle standard. Nous nous contenterons ici de lister les particules composant ce modèle, ainsi que leurs propriétés.

4.1 Les bosons

Les médiateurs des trois interactions sont des particules de spin 1. L’interaction électromagnétique a pour médiateur le photon γ . L’interaction faible est véhiculée par deux types de particules : les bosons W^\pm qui sont chargés électriquement et le boson Z qui est neutre. Ces bosons sont massifs, ce qui explique la très courte portée de l’interaction faible. Enfin, les bosons de l’interaction forte sont les huit gluons qui sont sans masse et portent la charge de couleur. Les propriétés de ces bosons sont résumées dans la table 1.1. On remarquera qu’il y a une différence entre le fait de porter une charge et de

Tableau 1.1– Les bosons élémentaires du modèle standard.

Nom		Masse (GeV)	Interaction transmise	Charge		
				Forte	Faible	EM
Photon	γ	0	EM	non	non	non
Boson faible W	W^+, W^-	80,4	Faible	non	oui	oui
Boson faible Z	Z	90,2	Faible	non	oui	non
Gluon	g	0	Forte	oui	non	non
Boson de Higgs	h	~ 125	aucune	non	oui	non

transmettre une interaction : un photon ne porte aucune charge et ne peut donc pas interagir avec un autre photon. En revanche les bosons W^\pm portent une charge électrique ainsi que la charge de l’interaction faible et peuvent donc se coupler au photon, au Z ou à un autre W . De même il existe des couplages entre gluons, porteurs de la charge de couleur, qui sont responsables du confinement. La charge faible n’a pas été discutée jusqu’à présent car contrairement aux charges électriques ou de couleur, on ne peut la décrire sans faire appel à la théorie des groupes. On se contentera ici de signaler que les particules portent une telle charge, sans en spécifier la nature.

Le modèle reste incomplet si on n’ajoute pas un boson massif de spin 0, le boson de Higgs. Ce dernier apparaît lorsqu’on veut décrire correctement la présence de bosons massifs dans l’interaction faible. Le mécanisme de Higgs sera présenté au chapitre 5.

À ces bosons, peut s’ajouter un hypothétique boson de spin 2, le graviton, qui décrirait l’interaction gravitationnelle. Il n’existe cependant pas de modèle satisfaisant d’une théorie quantique de la gravitation.

4.2 Les fermions

Les fermions du modèle sont tous des particules de spin $\frac{1}{2}$. Ils constituent les briques élémentaires de la matière et sont listés dans la table 1.2.

Il existe plusieurs classifications de ces fermions. La première sépare les fermions en **quarks**, qui participent à l’interaction forte, et en **leptons**. Parmi les leptons, il existe trois leptons chargés (électromagnétiquement) : l’électron, le muon et le lepton tau ; ainsi que trois leptons neutres : les neutrinos. Le nombre de quarks et le nombre de leptons est toujours conservé. Pour modéliser ce phénomène, on ajoute deux nombres quantiques

Tableau 1.2– Les fermions élémentaires du modèle standard.

Nom	Masse (GeV)	Charges			Nombres	
		Forte	EM	Faible	<i>B</i>	<i>L</i>
Leptons						
Électron	e^-	511×10^{-6}	non	oui	oui	0 1
Neutrino e	ν_e	0	non	non	oui	0 1
Muon	μ^-	0,105	non	oui	oui	0 1
Neutrino μ	ν_μ	0	non	non	oui	0 1
Tau	τ^-	1,777	non	oui	oui	0 1
Neutrino τ	ν_τ	0	non	non	oui	0 1
Quarks						
Down	d	$\sim 0,005$	oui	oui	oui	$\frac{1}{3} 0$
Up	u	$\sim 0,002$	oui	oui	oui	$\frac{1}{3} 0$
Strange (étrange)	s	$\sim 0,1$	oui	oui	oui	$\frac{1}{3} 0$
Charm (charmé)	c	$\sim 1,5$	oui	oui	oui	$\frac{1}{3} 0$
Bottom (beau)	b	$\sim 4,7$	oui	oui	oui	$\frac{1}{3} 0$
Top	t	173,5	oui	oui	oui	$\frac{1}{3} 0$

additifs conservés : le nombre baryonique B pour les quarks et le nombre leptonique L pour les leptons.

Les fermions sont aussi classés en trois familles ou générations, composées chacune de deux quarks (un de type *up*, l'autre de type *down*), d'un lepton chargé et d'un lepton neutre. La première famille est composée des quarks u et d , de l'électron et du neutrino électronique. C'est la seule à intervenir dans la composition de la matière ordinaire. Les deux autres familles sont composées de particules plus massives et instables. Ces familles sont donc :

$$(u, d, e^-, \nu_e), \quad (c, s, \mu^-, \nu_\mu), \quad (t, b, \tau^-, \nu_\tau).$$

Lors d'interaction entre particules, les nombres quantiques additifs sont tous conservés : le nombre baryonique, le nombre leptonique ainsi que les charges électrique, de couleur et faible. Tous les nombres quantiques des antiparticules sont inversés relativement à la particule correspondante. Pour voir si une interaction ou une désintégration est possible, il faut vérifier la conservation de toutes les charges entre l'état initial et l'état final, de même que la conservation de l'énergie et de l'impulsion (ce dernier point sera approfondi au paragraphe 1.4).

La nature des différents quarks est parfois appelée leur saveur (up, down,...). De même on parle également des différentes saveurs des leptons. Les interactions forte et électromagnétique conservent la saveur des particules, de même que l'interaction faible par courants neutres. Seule l'interaction faible par courants chargés, correspondant à l'échange d'un boson W^\pm , peut modifier la charge électrique et donc la saveur

des particules. Ces couplages par courants chargés peuvent s'opérer entre différentes familles de quarks. On pourra, par exemple, observer la désintégration du quark s via $c \rightarrow dW^+ \rightarrow de^+\nu_e$ ou encore $c \rightarrow sW^+ \rightarrow se^+\nu_e$.

En revanche, un tel mélange entre familles n'apparaît pas dans le secteur des leptons. Ainsi dans les exemples précédents, seul un neutrino électronique peut être associé au positron. De même, le neutrino ν_μ est toujours associé au muon et le neutrino ν_τ au lepton τ . Les différents couplages autorisés entre particules du modèle standard seront discutés plus en détail au chapitre 6.

● L'essentiel

Les points clefs du chapitre

- ❶ La physique des particules est le domaine de la physique qui s'intéresse à la description des interactions de base entre particules élémentaires.
- ❷ Le modèle standard décrit les interactions électromagnétique, faible et forte entre une douzaine de fermions (quarks et leptons) via l'échange de bosons vecteurs (photon, W^+ , Z , gluons).
- ❸ La gravitation est exclue de ce modèle car son effet est infime aux énergies concernées.
- ❹ La description de ce système nécessite un formalisme qui inclut à la fois la mécanique quantique et la relativité restreinte : la théorie quantique des champs.
- ❺ En conséquence de la nature relativiste de la théorie, chaque particule se voit associée une antiparticule de même masse, de même spin et de charges opposées.

Entraînez-vous



1.1 Unités naturelles

En physique des particules, on utilise le système d'unités naturelles tel que $\hbar = c = 1$ (sans dimension). En général on choisit le MeV ou le GeV comme unité d'énergie.

- a)** Quelle est la dimension d'un temps dans ce système d'unités ? Déterminez la valeur d'une seconde.
- b)** Même question pour une longueur et un mètre.
- c)** Les sections efficaces sont données en barns ($1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$). Que vaut 1 pb en unités naturelles ?

1.2 Gravitation

Le quark top est la particule élémentaire la plus massive connue. Nous allons comparer classiquement l'énergie potentielle gravitationnelle et électrostatique pour un système de deux quarks top.

- a)** On considère une paire de quarks top séparés d'une longueur correspondant à leur durée de vie. Déterminez cette longueur.
- b)** Calculez l'énergie potentielle gravitationnelle d'un des quarks dans le potentiel du second.
- c)** Même question pour l'énergie potentielle électrostatique. Comparez avec le résultat précédent.

1.3 Échelle de Plank

Les effets quantiques de la gravitation ne sont plus négligeables quand l'énergie gravitationnelle et l'énergie de masse deviennent comparables.

- a)** Rappelez l'échelle de longueur associée à une masse m .
- b)** En déduire l'échelle d'énergie, appelée masse de Plank ou échelle de Plank, à partir de laquelle une théorie quantique de la gravitation devient indispensable.

1.4 Quelques processus

Classez les processus suivants selon le type d'interaction : forte, électromagnétique ou faible. Si plusieurs couplages sont possibles, déterminez le processus dominant.

- a** $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$,
- b** $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$,
- c** $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$,
- d** $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + e^+ + e^-$,
- e** $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$,
- f** $\tau^- \rightarrow \pi^+ + \nu_\tau$,
- g** $D^- \rightarrow K^+ + \pi^- + \pi^-$,
- h** $\Lambda + p \rightarrow K^- + p + p$.

1.5 Collisions de protons

Le LHC est un collisionneur de protons installé au CERN qui a atteint en 2011 une énergie dans le centre de masse $E = 8 \text{ TeV}$.

- a)** Quelle est la longueur d'onde caractéristique (en unité SI) associée à cette énergie $E = 8 \text{ TeV}$?
- b)** Comparez cette longueur à la dimension typique d'un proton (1 fm). Quelles particules collisionnent effectivement ?

Notions de physique moderne

Introduction

Dans ce chapitre, nous discuterons rapidement des principaux piliers de la physique moderne : la mécanique analytique, la relativité restreinte et la mécanique quantique. L'objectif ne sera ni la rigueur, ni l'exhaustivité mais une simple discussion des concepts qui seront nécessaires pour suivre le reste de l'exposé. Le lecteur intéressé par ces sujets pourra se référer à l'abondante littérature francophone et anglophone traitant de ces sujets¹.

Objectifs

- Connaître** les concepts de base de la relativité restreinte, de la mécanique analytique et de la mécanique quantique.
- Définir** la transformation de Lorentz et les invariants associés.
- Définir** la densité lagrangienne et les équations d'Euler-Lagrange.
- Définir** la fonction d'onde et son interprétation probabiliste.
- Expliquer** les outils théoriques qui permettront de construire une théorie quantique des champs.

Plan

- 1 Relativité restreinte
- 2 Mécanique analytique
- 3 Mécanique quantique

1 Relativité restreinte

1.1 Transformation de Lorentz et principe de relativité

Un événement se réalise en un point de l'espace $\vec{x} = (x, y, z)$ et à un instant t donnés. Le principe de relativité, énoncé à l'origine par Galilée, affirme que les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels, c'est-à-dire qu'il est

1. Une liste non exhaustive d'ouvrages de référence est donnée à la fin de cet ouvrage.

impossible de distinguer deux référentiels en translation **rectiligne** uniforme l'un par rapport à l'autre.

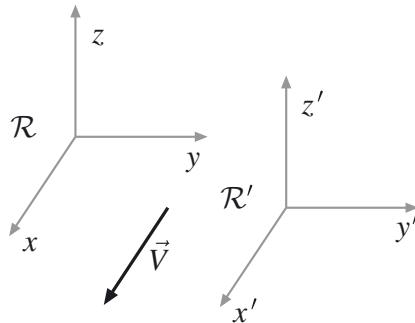


Figure 2.1– Référentiels en translation uniforme.

La relation entre les coordonnées d'espace-temps dans deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' en translation à la vitesse $\vec{V}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = V \vec{u}_x$. La dernière partie de l'égalité indique simplement que l'on choisit un système d'axes tel que \vec{u}_x soit aligné avec la vitesse de déplacement. Ainsi les coordonnées y et z ne sont pas modifiées. La transformation linéaire des coordonnées la plus générale est :

$$\begin{aligned} t' &= \lambda(v)t + \mu(v)x \\ x' &= \xi(v)t + \gamma(v)x. \end{aligned}$$

Par définition, le centre $(x', y') = (0, 0)$ de \mathcal{R}' se déplace à la vitesse V dans le référentiel \mathcal{R} et le centre $(x, y) = (0, 0)$ de \mathcal{R} se déplace à la vitesse $-V$ dans \mathcal{R}' , soit :

$$x = Vt, \quad x' = 0 \rightarrow \xi + \gamma V = 0x = 0, \quad x' = -Vt' \rightarrow \lambda = \xi.$$

On peut alors considérer deux hypothèses :

- Le temps est absolu, c'est-à-dire que $t = t'$. On a alors $\lambda = 1$, $\mu = 0$ et la transformation des coordonnées est la transformation de Galilée :

$$T_{g(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}')} = \begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \end{cases} \text{ et } T_{l(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R})} = \begin{cases} t = t' \\ x = x' + Vt' \end{cases}$$

Dans ce cas, les vitesses sont additives et il n'y a pas de vitesse limite.

- Soit on postule l'existence d'une vitesse limite c , ce qui est suggéré tant par la théorie que par l'étude expérimentale des ondes électromagnétiques. Ces ondes se propagent à une vitesse finie et cette vitesse doit être la même dans tous les référentiels inertiels. La transformation des coordonnées d'espace-temps est alors la transformation de Lorentz :

$$T_{l(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}')} = \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \end{cases} \text{ et } T_{l(\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R})} = \begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \end{cases}$$

avec :

$$\beta = \frac{V}{c} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.1)$$

Pour que le facteur de Lorentz, γ , reste réel, la vitesse réduite β ne peut pas excéder l'unité. La vitesse c est donc la vitesse maximale que peut atteindre un système. C'est pourquoi un objet se déplaçant à cette vitesse limite possède la même vitesse dans tous les référentiels. La transformation de Lorentz couple l'espace et le temps. L'une des conséquences les plus connues est que le temps s'écoule plus vite dans le référentiel propre d'un observateur que dans n'importe quel référentiel en mouvement : le temps n'est plus absolu.

Matriciellement, en rajoutant les dimensions spatiales non affectées par la translation, la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ avec } \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Comme $\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$ on peut définir la rapidité η par :

$$\cosh \eta = \gamma \text{ et } \sinh \eta = \gamma\beta \Rightarrow \tanh \eta = \beta, \quad (2.3)$$

et ainsi

$$\eta = \tanh^{-1} \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}. \quad (2.4)$$

La rapidité joue un rôle important d'un point de vue expérimental car elle peut s'approximer par un critère géométrique.

L'intervalle s entre les deux événements (\vec{x}_1, t_1) et (\vec{x}_2, t_2) généralise la distance euclidienne à l'espace-temps :

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - \left|(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\right|^2. \quad (2.5)$$

L'intervalle est une grandeur indépendante du référentiel :

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2(t'_1 - t'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2 \\ &= (\gamma(ct_1 - \beta x_1) - \gamma(ct_2 - \beta x_2))^2 - (\gamma(x_1 - \beta ct_1) - \gamma(x_2 - \beta ct_2))^2 \\ &\quad - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \\ &= c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \\ s'^2 &= s^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si $s^2 > 0$, l'intervalle est dit du genre « temps » : les deux événements sont en causalité car une information peut passer du point 1 au point 2 avec une vitesse inférieure à c . À l'inverse, si $s^2 < 0$, l'intervalle est dit du genre « espace » et les deux événements sont non causals car incapables d'échanger une information du fait de la vitesse limite c .

Pour tout objet en mouvement à une vitesse $v < c$, on peut définir un référentiel où l'objet est au repos. Les grandeurs β , γ et η sont ainsi définies dans un repère \mathcal{R} en considérant le mouvement de ce dernier par rapport au référentiel au repos, soit $\beta = \frac{v}{c}$. On pourra donc parler, par exemple, de la rapidité d'une particule relativiste.

Les seules transformations qui conservent l'intervalle sont, outre les transformations de Lorentz (ou boosts), les rotations d'espace, les translations et réflexions d'espace et les translations et réflexions temporelles. L'ensemble des ces symétries forme le groupe de Lorentz-Poincaré. Dans une théorie relativiste, le principe de relativité et la constance de la vitesse de la lumière se traduisent par l'invariance des lois de la physique sur tout changement des coordonnées suivant une transformation de ce groupe. De même, une grandeur qui n'est pas modifiée par une telle transformation est un **invariant de Lorentz** ou **scalaire de Lorentz**. L'intervalle entre deux événements est un invariant de Lorentz.

1.2 Composition des vitesses

Le vecteur vitesse n'est pas un invariant de Lorentz. La loi de transformation du vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ dans un référentiel fixe \mathcal{R} en $\vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt'}$ dans un référentiel \mathcal{R}' en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$ se détermine en différentiant la transformation des coordonnées :

$$\begin{cases} dx &= \cosh \eta dx' + \sinh \eta c dt' \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \\ dt &= \sinh \eta dx' + \cosh \eta c dt' \end{cases} \quad (2.7)$$

d'où :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\cosh \eta dx' + \sinh \eta c dt'}{\frac{1}{c} \sinh \eta dx' + \cosh \eta c dt'} = \frac{v'_x + c \tanh \eta}{1 + \frac{v'_x}{c} \tanh \eta}. \quad (2.8)$$

En raisonnant de même pour v_y et v_z , on trouve la loi de composition des vitesses :

$$v_x = \frac{v'_x + c\beta}{1 + v'_x \frac{\beta}{c}} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}}, \quad (2.9)$$

$$v_{y/z} = \frac{v'_{y/z}}{\gamma \left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)}. \quad (2.10)$$

Pour une particule de vitesse \vec{v} dans \mathcal{R} et \vec{v}' dans \mathcal{R}' en mouvement avec la vitesse \vec{V} , on peut définir la rapidité dans le référentiel \mathcal{R} , $\tanh \chi = \frac{v}{c}$, celle dans \mathcal{R}' , $\tanh \chi' = v'/c$ ainsi que la rapidité de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , $\tanh \eta = V/c$. Si les trois vitesses sont

selon la même direction, on a :

$$\frac{v_x}{c} = \frac{\frac{v_x}{c} + \frac{V}{c}}{1 + \frac{v_x V}{c^2}} \Rightarrow \tanh \chi = \frac{\tanh \chi' + \tanh \eta}{1 + \tanh \chi' \tanh \eta} = \tanh(\chi' + \eta). \quad (2.11)$$

et finalement $\chi = \chi' + \eta$. La rapidité est une grandeur additive.

1.3 Quadrivecteurs

La corrélation entre espace et temps introduite par la relativité restreinte oblige à remplacer l'espace euclidien à trois dimensions par un nouvel espace à quatre dimensions, l'espace-temps de Minkowski. Dans cet espace, la position devient un objet à quatre coordonnées appelé **quadrivecteur position** :

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \quad (2.12)$$

Les coordonnées avec l'indice en haut sont appelées coordonnées contravariantes. Un quadrivecteur quelconque $A = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ est un objet qui suit les mêmes règles de transformation que la quadri-position. Les coordonnées covariantes, notées avec l'indice en bas, sont données par :

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3, \quad (2.13)$$

L'intervalle entre l'origine $O = (0, 0, 0, 0)$ et un quadrivecteur position x vaut :

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3. \quad (2.14)$$

L'intervalle correspond à la norme du quadrivecteur, qui sera souvent notée x^2 ou $x^\mu x_\mu$. Dans cette dernière notation, dite notation d'Einstein, l'opérateur de sommation est sous-entendu :

$$s^2 = x^2 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu = x^\mu x_\mu. \quad (2.15)$$

De manière générale, toute notation faisant apparaître un même indice en haut et en bas implique une somme sur cet indice. L'habitude veut qu'un indice *grec* corresponde à une somme sur les quatre coordonnées d'espace-temps (somme de 0 à 3), alors qu'un indice *latin* indique une somme restreinte aux composantes spatiales (somme de 1 à 3).

Le produit scalaire entre deux quadrivecteurs A et B vaut :

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A_0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad (2.16)$$

le dernier terme étant le produit scalaire euclidien. Les transformations du groupe de Lorentz conservent l'intervalle. Comme un quadrivecteur se transforme de la même manière que la quadri-position, on en déduit que A^2 et $A \cdot B$ sont également des invariants de Lorentz.

Dans un référentiel fixe, la variation d'intervalle est :

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 dt^2 - d\vec{x} \cdot d\vec{x} = c^2 dt^2 - \vec{v}^2 dt^2 = c^2(1 - \beta^2)dt^2. \quad (2.17)$$

Dans le référentiel au repos de la particule, la variation spatiale est nulle et :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2. \quad (2.18)$$

L'invariance de l'intervalle sous une transformation de Lorentz implique :

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{1}{\gamma} dt, \quad (2.19)$$

ce qui définit le temps propre τ de la particule. Dans une désintégration liée au temps de vie d'une particule, c'est relativement au temps propre que l'on détermine la probabilité de désintégration.

À partir de l'intervalle élémentaire, on définit deux nouveaux quadrivecteurs : la quadri-vitesse u et la quadri-impulsion p . La quadri-vitesse généralise la notion de vitesse de la mécanique newtonienne :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt}, \quad (2.20)$$

soit

$$u = (\gamma c, \gamma \vec{v}) \text{ et } u^\mu u_\mu = c^2. \quad (2.21)$$

Enfin on généralise la notion d'impulsion par la quadri-impulsion ou quadrivecteur énergie-impulsion, $p = mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$. Dans la limite des faibles vitesses $\beta \ll 1$ (mécanique newtonienne), le terme p_0 devient :

$$\begin{aligned} p_0 &= \gamma mc \\ &= mc (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx mc \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) \\ p_0 &\approx \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

La composante temporelle de la quadri-impulsion est égale à l'énergie cinétique plus un terme constant : l'énergie de masse. En mécanique lagrangienne, on montre que $p_0 c$ est l'énergie. Ainsi le quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit $p = (\frac{E}{c}, \vec{p})$. Sa norme vaut :

$$p^2 = m^2(\gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2) = m^2 c^2, \quad (2.23)$$

c'est la masse invariante de la particule. Comme son nom l'indique c'est un invariant de Lorentz. Cette dernière relation se réécrit :

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2, \quad (2.24)$$

soit, en unités naturelles :

$$E^2 = m^2 + p^2 \text{ ou encore } m^2 = E^2 - p^2. \quad (2.25)$$

Les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion sont bien sûr toujours vérifiées lors de l'évolution d'un système et se traduisent par la conservation de la quadri-impulsion totale du système. On parlera de particule relativiste quand $p \sim m$, et de

particule ultrarelativiste si $p \gg m$. Dans ce dernier cas, on pourra faire l'approximation $E^2 \approx p^2$ comme pour une particule de masse nulle.

Finalement on introduit les opérateurs :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ et } \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (2.26)$$

Ils forment un opérateur quadrivectoriel qui généralise à l'espace-temps l'opérateur $\vec{\nabla}$. On a alors :

$$\partial = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (2.27)$$

En particulier, on notera que $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square$ est l'opérateur d'Alembertien qui apparaît notamment dans l'équation de propagation de l'onde électromagnétique ($\square \varphi = 0$).

1.4 Cinématique

Considérons un système composé initialement de plusieurs particules, de quadri-impulsions p_1^i, \dots, p_n^i . Ces particules interagissent entre elles et on obtient dans l'état final m particules, qui peuvent différer des particules initiales, d'impulsion p_1^f, \dots, p_m^f .

Dans un référentiel donné, la quadri-impulsion totale est conservée, soit :

$$\sum_k^n p_k^i = \sum_k^m p_k^f. \quad (2.28)$$

De plus, la norme $s = \left(\sum_k^n p_k^i \right)^2 = \left(\sum_k^m p_k^f \right)^2$ est un invariant de Lorentz, donc possède la même valeur dans tous les référentiels. L'énergie totale disponible lors de l'interaction, \sqrt{s} , est l'**énergie dans le centre de masse** du système. Si toutes les particules de l'état final sont produites au repos, c'est-à-dire sans énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse, alors :

$$p_1^f = (m_1, 0, 0, 0), \quad p_2^f = (m_2, 0, 0, 0), \dots, p_m^f = (m_m, 0, 0, 0), \quad (2.29)$$

où m_k est la masse invariante de la k -ième particule finale. L'énergie dans le centre de masse est ainsi :

$$\sqrt{s} = \sum_{k=1}^m m_k. \quad (2.30)$$

Pour produire un ensemble de particules, il faut disposer, au minimum, d'une énergie dans le centre de masse égale à la masse des particules. Dans ce cas on parle de production au seuil. Si $\sqrt{s} > \sum m_k$, l'énergie restante devient l'énergie cinétique des particules finales.

Désintégration d'une particule de masse M : l'énergie dans le centre de masse est $\sqrt{s} = M$. Les masses des particules de l'état final doivent vérifier $\sum m_k < M$. Une particule ne peut se désintégrer qu'en particules plus légères. Les particules les plus légères sont donc stables.

État final à deux corps : les quadri-impulsions dans le référentiel du centre de masse sont :

$$p_1^f + p_2^f = \begin{pmatrix} \sqrt{s} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1^f = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1^2 + p^2} \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2^f = \begin{pmatrix} \sqrt{m_2^2 + p^2} \\ -p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$E_1 = \sqrt{m_1^2 + p^2} = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}}, \quad (2.31)$$

en choisissant l'axe x comme direction de l'impulsion.

Collisions de deux particules : il s'agit du même problème que précédemment, où on aura intérêt à exprimer l'énergie dans le centre de masse, \sqrt{s} , en fonction de l'impulsion des particules incidentes. On a alors :

$$\sqrt{s} = \sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2} > m_1 + m_2. \quad (2.32)$$

En accélérant des particules que l'on collisionne, c'est-à-dire en augmentant p , on peut obtenir des valeurs de \sqrt{s} de plus en plus élevées. C'est ainsi que l'on peut produire des particules lourdes à partir de particules légères : en collisionnant, par exemple, deux protons de grande énergie on peut produire des particules beaucoup plus massives tels des bosons W^\pm ou des quarks top, dès lors que \sqrt{s} dépasse la somme des masses des particules filles.

On a discuté au chapitre 1 qu'une interaction entre particules n'était possible que si les différents nombres quantiques étaient conservés. On ajoute ici une seconde condition : l'interaction doit être cinématiquement permise.

2 Mécanique analytique

2.1 Principe de moindre action

En mécanique analytique, un système de points matériels est décrit par ses coordonnées $q(t)$ et ses vitesses $\dot{q}(t)$ ¹. Les équations du mouvement sont les équations qui relient $\ddot{q}(t)$, $\dot{q}(t)$ et $q(t)$. Un système classique est entièrement caractérisé par son lagrangien $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ qui ne dépend que des coordonnées et des vitesses. Dans l'exposé qui suit, on supposera systématiquement que le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, ce qui est généralement le cas. Pour passer d'un point (q_a, t_a) de l'espace-temps à un autre point (q_b, t_b) , il existe *a priori* une infinité de trajectoires possibles, c'est-à-dire une infinité d'évolutions temporelles des coordonnées et des vitesses. Le **principe de**

1. $q(t)$ n'est ici qu'une notation condensée pour noter l'ensemble des coordonnées du système. Pour un point matériel, ces coordonnées seraient $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ dans un repère cartésien où encore $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ dans un repère sphérique.

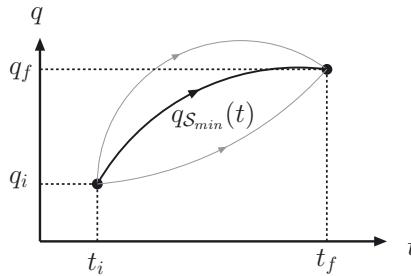


Figure 2.2 – Principe de moindre action : parmi toutes les trajectoires $q(t)$ possibles entre l'état initial q_i et l'état final q_f , la trajectoire physique est celle qui minimise l'action.

moindre action (ou principe d'Hamilton) postule que la trajectoire physique du système est celle qui minimise l'action classique S :

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(q, \dot{q}) dt. \quad (2.33)$$

Les équations du mouvement dérivent de ce principe. Si les coordonnées $q(t)$ minimisent l'action, alors pour toute variation infinitésimale $\delta q(t)$ de la trajectoire (les points de départ et d'arrivée restant fixes, soit $\delta q(t_i) = \delta_q(t_f) = 0$), on doit avoir $\delta S = 0$, soit :

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= S(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - S(q, \dot{q}) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} (\mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}) - \mathcal{L}(q, \dot{q})) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q dt + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_i}^{t_f}}_{=0} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \\ 0 &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Cette relation doit être satisfaite pour toute fonction $\delta q(t)$, ce qui ne peut être le cas que si :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (2.35)$$

L'équation ainsi obtenue est l'équation d'Euler-Lagrange, qui est l'équation du mouvement. Pour un point matériel, le lagrangien s'interprète comme $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = E(\dot{q}) - U(q)$. Le terme $E(\dot{q})$ est l'énergie cinétique qui ne dépend que des vitesses et qui correspond au lagrangien libre (sans interaction) du système. L'isotropie de l'espace impose que E ne dépende que de la norme de la vitesse, soit $E \propto \dot{q}^2$. Le terme $U(q)$ est l'énergie potentielle et ne dépend que des coordonnées, ce qui implique que l'interaction entre

deux points est instantanée. Ceci ne sera plus possible en mécanique relativiste où la vitesse maximale d'une interaction est finie.

2.2 Hamiltonien et crochets de Poisson

Plutôt que les vitesses \dot{q} , on utilise parfois les moments conjugués : $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$. L'équation d'Euler-Lagrange est alors :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}. \quad (2.36)$$

Pour un système conservatif en coordonnées cartésiennes, on a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ et l'équation d'Euler-Lagrange correspond à l'équation fondamentale de la dynamique. Le moment conjugué de \dot{x} est donc le vecteur impulsion. Ce changement de variable de \dot{q} vers p s'opère au moyen d'une transformation de Legendre du lagrangien : c'est le hamiltonien. Il est donc défini par :

$$\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L}. \quad (2.37)$$

On montre que si $\mathcal{L} = E - U$, le hamiltonien correspond à l'énergie totale du système, soit $\mathcal{H} = E + U$. En différenciant le hamiltonien :

$$d\mathcal{H} = \dot{q}dp + pd\dot{q} - d\mathcal{L}, \quad (2.38)$$

avec :

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}d\dot{q} = \dot{p}dq + pd\dot{q}, \quad (2.39)$$

soit finalement :

$$d\mathcal{H} = \dot{q}dp - \dot{p}dq. \quad (2.40)$$

Par ailleurs, l'expression générale de cette différentielle est :

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}dp + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}dq. \quad (2.41)$$

En identifiant les termes, on en déduit un système d'équations couplées, les équations de Hamilton, qui sont équivalentes à l'équation du second ordre d'Euler-Lagrange :

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \quad (2.42)$$

Une observable $\mathcal{A}(q, p, t)$ est une grandeur conservée si elle reste constante au cours du temps, soit $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0$. La dérivée totale par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \\ \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \{A, H\} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

où on introduit le crochet de Poisson de deux paramètres :

$$\{u, v\} = \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} \frac{\partial u}{\partial p}. \quad (2.44)$$

Une grandeur conservée doit donc satisfaire $\{A, H\} = 0$. C'est notamment le cas du hamiltonien : l'énergie totale se conserve, résultat bien connu. Le crochet de Poisson est un opérateur antisymétrique, qui jouera un rôle important lors du passage à la mécanique quantique. En particulier, on retiendra les propriétés suivantes :

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \quad (2.45)$$

Dans ces dernières relations, on a spécifiquement explicité les indices des différentes coordonnées.

2.3 Théorème de Noether

Les constatations expérimentales ont souvent mis en évidence des grandeurs physiques qui restent inchangées lors de l'évolution du système étudié (énergie, impulsion, moment cinétique, quantité de matière, ...). C'est ainsi que les principales théories physiques ont été construites, en cherchant les équations du mouvement permettant de reproduire ces invariants. Emmy Noether démontra en 1918 que l'existence de chaque grandeur conservée était équivalente à l'invariance de l'action (et donc du lagrangien) sous une classe de transformations continues donnée. Une transformation continue des coordonnées q est un changement de variable de (q, \dot{q}) vers $(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ dépendant continûment d'un ou plusieurs paramètres réels α , c'est-à-dire que :

$$f : \alpha \rightarrow q^\alpha, \quad \text{avec } q^0 = q$$

est une fonction continue.

Les translations dans l'espace qui transforment (x, y, z) en $(x + \alpha_x, y + \alpha_y, z + \alpha_z)$ sont un exemple de transformation continue de paramètres $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$. Si le lagrangien est invariant sous une telle transformation, c'est une symétrie du système. Cette symétrie se traduit formellement par :

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) \text{ quel que soit } \alpha, \quad (2.46)$$

ou encore $\frac{d\mathcal{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)}{d\alpha} = 0$. En différenciant le lagrangien, il vient :

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \alpha}, \quad (2.47)$$

soit en introduisant l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \alpha} \right) = 0. \quad (2.48)$$

On en déduit que la quantité :

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial q^\alpha}{\partial \alpha} \quad (2.49)$$

est un invariant. D'après l'équation (2.43), la formulation d'une telle invariance se traduit sous la forme $\{I, H\} = 0$. En explicitant les composantes des variables q , l'invariant devient :

$$I = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^\alpha} \frac{\partial q_i^\alpha}{\partial \alpha}. \quad (2.50)$$

Le lagrangien classique est de la forme :

$$\mathcal{L} = E(\dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(q). \quad (2.51)$$

Après transformation le lagrangien devient :

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m \left((\dot{x} + \dot{\alpha}_x)^2 + (\dot{y} + \dot{\alpha}_y)^2 + (\dot{z} + \dot{\alpha}_z)^2 \right) - V(q^\alpha) = \mathcal{L}. \quad (2.52)$$

L'invariant associé aux translations est le vecteur :

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^\alpha} \frac{\partial z^\alpha}{\partial \alpha_x} \\ I_y &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^\alpha} \frac{\partial z^\alpha}{\partial \alpha_y} \\ I_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha_z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \alpha_z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^\alpha} \frac{\partial z^\alpha}{\partial \alpha_z}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

En calculant les dérivées des coordonnées relativement aux paramètres, on obtient :

$$I_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}, \quad I_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^\alpha}, \quad I_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^\alpha}, \quad (2.54)$$

ou encore :

$$I_x = m\dot{x}^\alpha = p_x, \quad I_y = m\dot{y}^\alpha = p_y, \quad I_z = m\dot{z}^\alpha = p_z. \quad (2.55)$$

L'invariance du lagrangien sous les translations d'espace est associée à la conservation de l'impulsion.

En physique des particules, on s'attachera à construire le lagrangien du système en lui imposant certaines symétries. À chaque symétrie imposée au système, de nouvelles grandeurs conservées s'ajouteront au modèle. En plus des symétries d'espace-temps (translations, rotations, transformation de Lorentz), on ajoutera des symétries internes qui permettront d'introduire les interactions entre fermions. Dans le cas de l'électromagnétisme, les grandeurs conservées associées à la symétrie interne seront la charge et le courant.

2.4 Théorie classique des champs

Le concept de champ apparaît naturellement comme une extension de la notion de coordonnées. La mécanique classique décrit l'évolution temporelle d'un ensemble de points matériels caractérisés par des coordonnées q_i et leur vitesses \dot{q}_i (ou les moments conjugués p_i). Mais la description de l'électromagnétisme, par exemple, nécessite

des objets physiques qui sont définis en tout point de l'espace, des **champs**. On peut interpréter le champ comme la limite continue d'une infinité de coordonnées discrètes :

$$q_i(t) \xrightarrow[i \rightarrow +\infty]{} \varphi(\vec{x}, t), \quad (2.56)$$

la dépendance spatiale des coordonnées discrètes étant implicite. Assez naturellement, les coordonnées d'espace viennent jouer un rôle similaire à la coordonnée temporelle. On tentera donc de décrire l'évolution spatio-temporelle du champ. Cette équivalence temps-espace permet également de donner une formulation relativiste de la théorie des champs. Pour un champ $\varphi(\vec{x}, t) = \varphi(x)$, il faudra désormais considérer toutes les dérivées partielles $\partial_\mu \varphi$. Pour traiter les quatre dimensions de la même manière, le lagrangien est remplacé par une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x))$ telle que l'action soit :

$$S(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = \int \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) d^4x. \quad (2.57)$$

L'application du principe de moindre action est similaire à celle décrite au chapitre 2, mais nécessite l'introduction d'outils mathématiques plus complexes. En effet, le lagrangien est désormais une fonctionnelle, puisque c'est une fonction du champ et de ses dérivées qui sont eux-mêmes des fonctions de l'espace-temps. Les mathématiques fournissent cependant le concept de dérivée fonctionnelle $\frac{\delta \mathcal{L}(\varphi)}{\delta \varphi}$ et de différentielle fonctionnelle $\delta \mathcal{L}$ définie par :

$$\delta \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi_1)}{\delta \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\delta \mathcal{L}(\varphi_2)}{\delta \varphi_2} \delta \varphi_2. \quad (2.58)$$

Leur comportement est identique, dans les problèmes qui nous concernent, à une dérivée classique. Par exemple, pour une fonctionnelle $F(\varphi(x)) = \varphi^\dagger(x) \varphi(x)$ où φ est un champ complexe,

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi} = 2|\varphi|. \quad (2.59)$$

L'équation d'Euler-Lagrange décrivant l'évolution spatio-temporelle du champ φ est alors (voir exercice 2.3) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0. \quad (2.60)$$

Comme pour les coordonnées usuelles, on peut utiliser le moment conjugué : $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)}$ et généraliser les relations du paragraphe 2.2. En particulier les crochets de

Poisson entre deux champs évalués au même temps $x^0 = t$ deviennent :

$$\{\varphi(\vec{x}, t), \varphi(\vec{x}', t)\} = \{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} = 0, \quad (2.61)$$

$$\{\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)\} = \delta(x - x'). \quad (2.62)$$

De même, on généralise le théorème de Noether en théorie des champs. Ce théorème relie grandeur physique conservée et invariance du lagrangien sous une symétrie. Enfin, le Hamiltonien en théorie des champs s'obtient à partir du tenseur énergie-impulsion du champ φ qui est défini par :

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - \mathcal{L}$$

T^{00} correspond au Hamiltonien et donc à l'énergie totale du système.

3 Mécanique quantique

3.1 Fonction d'onde et probabilité

La mécanique quantique devient nécessaire pour décrire les phénomènes dont l'action approche la valeur de la constante de Planck.

L'un des premiers phénomènes physiques qui a pu être expliqué grâce à la théorie quantique est l'effet photoélectrique. La lumière est très bien décrite dans la théorie de Maxwell comme une onde électromagnétique. En envoyant une onde électromagnétique de haute fréquence (petite longueur d'onde) sur une plaque de métal, on arrive à éjecter des électrons, et ce, même pour une faible intensité : c'est l'effet photoélectrique. Des expériences réalisées au début du XX^e siècle, révèlent une relation linéaire entre l'énergie des électrons et la fréquence de l'onde : $E = a + bv$. La valeur mesurée de la pente correspond à la constante de Planck. En deçà d'une certaine longueur d'onde, plus aucun électron n'est observé, quelle que soit l'intensité du faisceau lumineux. Ce phénomène ne peut s'expliquer dans le cadre de la théorie ondulatoire, où l'énergie totale de l'onde n'est liée qu'à son intensité. En 1905, Einstein a expliqué l'effet photoélectrique en supposant que la lumière est de nature corpusculaire, c'est-à-dire composée de particules, les photons. Chaque photon porte une fraction $e = hv$ de l'énergie totale, dépendant de la fréquence. Un électron ne peut être arraché au cristal que si chacun des photons possède une énergie suffisante. La lumière semble donc se comporter à la fois comme une onde et un ensemble de particules.

Il en résulte que les concepts classiques de point matériel et d'onde ne sont plus pertinents. Les points matériels ont un comportement ondulatoire, la longueur d'onde étant reliée à l'impulsion par la relation de de Broglie. De même, on doit associer à une onde un comportement corpusculaire. À cause de cette dualité onde-corpuscule, la structure mathématique adaptée à la description d'un objet quantique aura la forme d'une onde complexe $\psi(\vec{x}, t)$ qui est associée à la densité de probabilité de présence au point \vec{x} définie par sa norme :

$$P(\vec{x}) = \psi^*(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t), \quad (2.63)$$

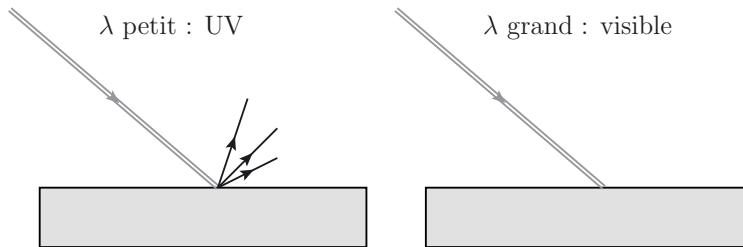


Figure 2.3 – Illustration de l’effet photoélectrique : un faisceau de lumière ultraviolette de faible intensité arrache des électrons à une plaque métallique alors qu’un faisceau intense de lumière visible en est incapable.

avec pour condition de normalisation :

$$\int \psi^*(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t)d\vec{x} = 1. \quad (2.64)$$

La position d’une particule n’est plus clairement définie. La carré de la fonction d’onde étant une densité de probabilité, on peut définir pour la position sa valeur moyenne $\langle x \rangle$ et sa variance Δx^2 . De même, l’impulsion ne peut être caractérisée que par une valeur moyenne et une variance Δp^2 . Un résultat fondamental de la mécanique quantique montre qu’il est impossible de mesurer simultanément avec précision l’impulsion et la position d’un objet. C’est l’inégalité d’Heisenberg :

$$\Delta x \Delta p > \hbar. \quad (2.65)$$

Une inégalité similaire apparaît entre la précision de la mesure d’une énergie et le temps de mesure :

$$\Delta E \Delta t > \hbar. \quad (2.66)$$

3.2 Observables et opérateurs

L’ensemble des fonctions satisfaisant aux propriétés mathématiques de la fonction d’onde forme un espace vectoriel de dimension infinie : un espace de Hilbert. Une fonction d’onde $\psi(x, t)$ est associée à un vecteur de cet espace noté $|\psi\rangle$. Le produit vectoriel dans l’espace de Hilbert est défini par :

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x, t)\psi(x, t)dx. \quad (2.67)$$

L’un des postulats de la mécanique quantique est qu’une observable physique O (position, impulsion, énergie, ...) n’est plus une grandeur numérique mais un opérateur hermitien \hat{O} agissant sur l’espace de Hilbert². Seuls les états propres de l’opérateur ont une valeur numérique de l’observable bien définie. Un opérateur peut être caractérisé

2. Dans les chapitres suivants, on utilisera simplement la notation O plutôt que \hat{O} pour un opérateur, s’il n’y a pas d’ambiguïté.

par ces éléments de matrice dans une base $\{|\varphi_k\rangle\}$ de l'espace de Hilbert :

$$O_{ij} = \langle \varphi_i | \hat{O} | \varphi_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i^*(x, t) \hat{O} \varphi_j(x, t) dx. \quad (2.68)$$

Les inégalités d'Heisenberg peuvent s'interpréter comme l'impossibilité de définir simultanément une valeur numérique pour les deux observables position et impulsion, c'est-à-dire que les deux opérateurs ne sont pas diagonalisables simultanément.

On note $|x_0\rangle$, l'état correspondant à la fonction d'onde $\varphi(x) = \delta(x - x_0)$. Ces états forment une base de l'espace des états. Par construction, la fonction d'onde est donnée par :

$$\langle x | \psi \rangle = \int \psi(x') \delta(x - x') dx' = \psi(x). \quad (2.69)$$

Elle caractérise les coordonnées de l'état $|\psi\rangle$ dans la base de position. Dans cette base, l'observable associée à une coordonnée de position x_i est un opérateur \hat{x}_i , qui doit satisfaire :

$$\langle x | \hat{x}_i | \psi \rangle = x_i \langle x | \psi \rangle = x_i \psi(x), \quad (2.70)$$

pour n'importe quelle fonction d'onde. L'opérateur \hat{x}_i est donc l'opérateur de multiplication par la coordonnée x_i .

Dans l'approche hamiltonienne, l'impulsion est le moment conjugué des coordonnées cartésiennes et satisfait aux crochets de Poisson (2.45). L'équivalent quantique des crochets de Poisson doit s'appliquer aux opérateurs et vérifier les mêmes propriétés de commutation. Le commutateur de deux opérateurs \hat{A} et \hat{B} ,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (2.71)$$

satisfait ces conditions. On postule alors la relation de quantification canonique :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (2.72)$$

Par ailleurs, le commutateur $[\hat{x}, \frac{\partial}{\partial x}]$ appliqué à un état quelconque $|\psi\rangle$ donne :

$$\left[\hat{x}, \frac{\partial}{\partial x} \right] |\psi\rangle = x \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial x} - \frac{\partial x |\psi\rangle}{\partial x} = - |\psi\rangle. \quad (2.73)$$

On en déduit que l'opérateur d'impulsion est :

$$\hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}. \quad (2.74)$$

De plus, par analogie avec les équations de Hamilton :

$$-\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \hat{\mathcal{H}} = i\hbar \frac{d}{dt}. \quad (2.75)$$

On associe à l'énergie totale (hamiltonien) l'opérateur de dérivation temporelle. La quantification de l'équation classique : $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V$ donne l'équation d'évolution

d'un système quantique non relativiste, l'**équation de Schrödinger** :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 |\psi\rangle + \hat{V} |\psi\rangle. \quad (2.76)$$

En dérivant le produit $\psi^* \psi$ par rapport au temps, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi^* \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* \\ &= \frac{i\hbar^2}{2m} \left(\psi^* \vec{\nabla}^2 \psi - \psi \vec{\nabla}^2 \psi^* \right) \\ &= \frac{i\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \cdot \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

où l'équation de Schrödinger a été utilisée pour évaluer $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$. L'équation peut se réécrire sous la forme $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$. Une telle relation apparaît par exemple en mécanique des fluides où en électromagnétisme et porte le nom d'équation de continuité. Elle relie l'évolution de la densité de matière dans un volume à la divergence d'un courant. Sa forme intégrale est :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{\mathcal{V}} -\vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.78)$$

La dernière relation découle du théorème de Green-Ostrogradski. Sous cette forme, l'équation de continuité traduit que la quantité de matière à l'intérieur d'un volume \mathcal{V} est égale à la somme des courants entrant et sortant de ce volume. Si le volume d'intégration est l'espace entier, il vient naturellement : $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \rho dV = 0$ soit $\int_{\mathbb{R}^3} \rho dV$ est une constante dans le temps. De plus, dans le cadre de la mécanique quantique, la densité $\rho = \psi^* \psi$ est toujours positive, ce qui permet d'interpréter ce terme comme une densité de probabilité et de fixer la normalisation de la fonction d'onde par $\int_{\mathbb{R}^3} \rho dV = 1$. Le courant de probabilité est alors $\vec{J} = \frac{-i\hbar^2}{2m} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)$. Enfin on remarquera que l'équation de continuité en notation covariante est :

$$\partial_0 j^0 = -\partial_i j^i \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.79)$$

avec $j^0 = \rho$ et $j^i = J_i$. Cette équation ne dépend pas du référentiel choisi et j^μ est un quadrivecteur (le quadri-courant).

3.3 Différents points de vue

Si la fonction d'onde est connue au temps t_0 , on peut la déterminer au temps t via un opérateur d'évolution $\hat{U}(t, t_0) : |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$. Cet opérateur doit être unitaire, pour préserver la normalisation de la fonction d'onde. De plus, il doit vérifier $\hat{U}(t, t') = \hat{U}(t, t'') \hat{U}(t'', t')$. Ces deux conditions imposent que \hat{U} est un opérateur hermitien :

$$\hat{U}(t, t) = \mathbb{1} = \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t) \Rightarrow \hat{U}(t, t')^{-1} = \hat{U}^+(t, t') = \hat{U}(t', t). \quad (2.80)$$

Pour un système conservatif, l'opérateur hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps et l'équation de Schrödinger peut s'intégrer :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle \Rightarrow U(t, t') = e^{-\frac{i\hat{H}(t-t')}{\hbar}}. \quad (2.81)$$

Il existe plusieurs formulations équivalentes de la mécanique quantique.

- **La représentation de Schrödinger** est celle qui a été utilisée jusqu'ici. Les vecteurs $|\psi_S(t)\rangle$ ont une évolution temporelle et les opérateurs sont indépendants du temps. L'évolution temporelle de la fonction d'onde est donnée par l'équation de Schrödinger ou par l'opérateur d'évolution : $|\psi_S(t)\rangle = \hat{U}(t_0, t) |\psi_S(t_0)\rangle$.
- **En représentation de Heisenberg**, la dépendance temporelle est absorbée dans les opérateurs. Les vecteurs d'état sont alors constants. La fonction d'onde n'a plus de dépendance temporelle. L'opérateur d'évolution permet de définir un vecteur d'état indépendant du temps $|\psi_H\rangle = \hat{U}^+(t, t_0) |\psi_S(t_0)\rangle$. De même les opérateurs deviennent :

$$\hat{O}_H(t) = \hat{U}^+(t, t_0) \hat{O}_S \hat{U}(t, t_0). \quad (2.82)$$

L'équation de Schrödinger est remplacée par une équation donnant l'évolution temporelle des opérateurs eux-mêmes. Si l'observable ne dépend pas explicitement du temps :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O}_H = [\hat{O}_H, \hat{\mathcal{H}}_H]. \quad (2.83)$$

Cette expression est analogue à celle de la mécanique analytique, où le commutateur a remplacé les crochets de Poisson. En particulier, un invariant \hat{I} sera une observable qui n'évolue pas dans le temps et donc qui commute avec l'opérateur hamiltonien, soit $[\hat{I}, \hat{\mathcal{H}}] = 0$.

- Enfin, une troisième représentation, la **représentation d'interaction**, est utile pour décrire les problèmes de diffusion. On sépare le hamiltonien en un terme libre et un terme d'interaction : $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{V}}$ et on note \hat{U}_0 l'opérateur d'évolution du système libre. On pose alors pour un vecteur d'état et pour un opérateur :

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{U}_0^+(t, t_0) |\psi_S(t_0)\rangle, \quad \hat{O}_I = \hat{U}_0^+(t, t_0) \hat{O}_S \hat{U}_0(t, t_0). \quad (2.84)$$

Ici, états et opérateurs dépendent du temps. Le résultat remarquable est que l'équation d'évolution d'un état ne dépend que du hamiltonien d'interaction en représentation d'interaction alors que l'évolution temporelle des opérateurs ne dépend que du hamiltonien libre :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \hat{\mathcal{V}}_I |\psi_I(t)\rangle, \quad i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O}_I = [\hat{O}_I, \hat{\mathcal{H}}_I]. \quad (2.85)$$

La démonstration de ces résultats fait l'objet de l'exercice 2.2. Cette représentation permet de décrire l'évolution d'un système en interaction à partir des solutions des équations libres. Nous y ferons appel au chapitre 6 pour décrire les processus de diffusion.

La physique ne dépend évidemment pas du choix de représentation, donc les éléments de matrice d'un opérateur restent les mêmes :

$$\langle \psi_S | \hat{O}_S | \varphi_S \rangle = \langle \psi_H | \hat{O}_H | \varphi_H \rangle = \langle \psi_I | \hat{O}_I | \varphi_I \rangle. \quad (2.86)$$

3.4 Spin d'une particule

Le spin est une propriété analogue à un moment angulaire qui n'apparaît que dans les systèmes quantiques. Cependant, ce spin n'a pas de justification autre en mécanique quantique que de permettre d'expliquer des constatations expérimentales : par exemple, la diffusion d'un atome d'hydrogène par un champ magnétique alors que le modèle quantique de l'atome prédit un moment magnétique nul (expérience de Stern et Gerlach), ou la présence de deux électrons dans le même état quantique dans le remplissage des couches atomiques, suggérant qu'un nouveau nombre quantique intervient pour les différencier.

Ce nombre quantique de spin possède les mêmes propriétés qu'un moment cinétique intrinsèque. Il obéit aux mêmes relations. Le moment angulaire est un vecteur J_1, J_2, J_3 , de même le spin sera caractérisé par trois opérateurs $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$. L'analogie avec les crochets de Poisson, impose les relations de commutation entre opérateurs :

$$[S_1, S_2] = i\hbar S_3, \quad [S_2, S_3] = i\hbar S_1, \quad [S_3, S_1] = i\hbar S_2. \quad (2.87)$$

Ces opérateurs sont donnés par les matrices de Pauli $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Ces trois opérateurs ne peuvent être diagonalisés simultanément. Seuls $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ et S_3 commutent avec le hamiltonien. La valeur propre de S^2 caractérise le spin S du système et vaut $S(S+1)$. En conséquence de cette structure, le spin ne peut prendre que des valeurs entières ou demi-entières (en unité naturelle). La projection du spin dans une direction caractéristique, S_3 , peut prendre pour valeur propre :

$$S_3 = -S, -S+1, \dots, S-1, S. \quad (2.89)$$

Pour une particule de spin S , il existe $2S+1$ projections, c'est-à-dire autant d'états différents du système. Ainsi l'électron possède un spin $S = \frac{1}{2}$ et peut exister dans deux états distincts : $S_3 = \pm \frac{1}{2}$.

Le spin d'un système composé de deux particules de spin S_1 et S_2 est donné par les règles de composition des spins. Il existe plusieurs états, de spin différent, allant de $S = |S_1 - S_2|$ à $S = S_1 + S_2$, par saut d'une unité. Ainsi un système de deux électrons peut avoir soit un spin 0, soit un spin 1. La justification des ces règles fait appel à la théorie des groupes, la structure mathématique du spin correspondant au groupe $SU(2)$.

Le spin prend tout son sens dans le cadre d'une théorie relativiste. En effet il s'agit d'un invariant de Lorentz au même titre que la masse. Ici aussi, la justification formelle fait appel à la théorie des groupes et ne sera pas discutée.

Les points clefs du chapitre

- 1 Le principe de relativité et la constance de la vitesse de la lumière imposée par l'électromagnétisme conduisent à une relation particulière entre les coordonnées dans deux référentiels inertiels : la transformation de Lorentz.
- 2 La relativité restreinte relie les notions d'espace et de temps au sein de l'espace-temps de Minkowski, dont les éléments sont des quadrivecteurs.
- 3 La pseudo-norme d'un quadrivecteur et le produit scalaire de deux quadrivecteurs sont des invariants de Lorentz, qui ne dépendent pas d'un choix de référentiel.
- 4 La norme du quadrivecteur énergie-impulsion définit la masse invariante. Cet invariant couplé à la conservation de l'énergie et de l'impulsion lors d'une interaction sont les éléments de base de la cinématique relativiste.
- 5 La mécanique analytique offre une approche systématique de la description de l'évolution temporelle d'un système physique. Elle s'appuie sur le principe de moindre action qui conduit à construire les équations différentielles du mouvement ou équations d'Euler-Lagrange à partir du lagrangien du système.
- 6 Le théorème de Noether fait le lien entre les symétries dans les équations du mouvement et l'existence de grandeurs conservées. Il aura un impact important dans la construction des interactions entre particules.
- 7 La théorie classique des champs est le prolongement de la mécanique analytique à un ensemble infini et continu de coordonnées, le champ $\varphi(x,t)$. Les équations d'Euler-Lagrange décrivent alors l'évolution spatio-temporelle du champ. La relativité restreinte s'intègre naturellement dans la théorie des champs.
- 8 La mécanique quantique est la théorie qui permet la description des phénomènes microscopiques tels l'effet photoélectrique. Elle repose sur l'abandon de la notion classique de trajectoire $x(t)$ au profit d'une fonction d'onde $\psi(x,t)$ dont le carré $|\psi(x,t)|^2$, à un temps t fixé, traduit la probabilité de présence du système en x .
- 9 La représentation d'interaction est une formalisation de la mécanique quantique qui permet de décrire de manière exacte un système en interaction à partir des solutions des équations libres.
- 10 De par leurs formulations, en particulier le traitement différent du temps, mécanique quantique et relativité restreinte sont, en apparence, difficilement conciliables.



Entraînez-vous

2.1 Invariance par rotation

On veut déterminer l'invariant associé à la symétrie de rotation.

a) Montrez que l'invariant pour une rotation d'angle θ autour de l'axe z :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y &\rightarrow y' = x \sin \theta + y \cos \theta, \\ z &\rightarrow z' = z, \end{aligned}$$

est la composante selon z du moment cinétique.

b) En déduire l'invariant associé à la symétrie par rotation spatiale.

2.2 Représentation d'interaction

a) En explicitant l'opérateur d'évolution, donnez le vecteur d'état en représentation d'interaction $|\psi_I(t)\rangle$ en fonction du vecteur d'état en représentation de Heisenberg $|\psi_H\rangle = |\psi_S(0)\rangle$.

b) En dérivant le résultat précédent par rapport au temps, démontrez l'équation d'évolution des états en représentation d'interaction :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \hat{\mathcal{V}}_I |\psi_I(t)\rangle.$$

c) De la même manière, démontrez l'équation d'évolution d'un opérateur $\hat{O}_I(t)$ en représentation d'interaction :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{O}_I = [\hat{O}_I, \hat{\mathcal{H}}_I].$$

2.3 Équation d'Euler-Lagrange

En adaptant la démonstration du chapitre 2, démontrez l'équation d'Euler-Lagrange pour un champ scalaire réel $\varphi(x)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0.$$

Lagrangien de Klein-Gordon

Le lagrangien d'un champ scalaire réel $\varphi(x)$ est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2).$$

a) Montrez que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} = \partial^\nu \varphi$.

b) Retrouvez l'équation de Klein-Gordon à partir de l'équation d'Euler-Lagrange appliquée à ce lagrangien.

2.4 Seuil de l'interaction $np \rightarrow \pi^0 D$

On envoie un faisceau de neutrons sur une cible fixe d'hydrogène liquide.

a) Quelle doit être l'énergie minimale des neutrons pour obtenir la réaction $np \rightarrow \pi^0 D$?
remarque : au seuil de production, les particules finales sont toutes au repos dans le référentiel du centre de masse

b) En déduire la vitesse des neutrons.

Donnée : $m_{deuton} = 1876 \text{ MeV}$.

2.5 Cible fixe et collision

Déterminez l'énergie disponible dans le centre de masse (énergie utile pour produire de nouvelles particules) pour :

- a) Une collision d'un faisceau de protons d'énergie E sur une cible fixe d'hydrogène.
- b) Une collision entre deux faisceaux de protons d'énergie $E/2$ chacun.
- c) Que se passe-t-il pour $E \gg m_p$?

2.6 Production d'antiprotons

L'antiproton a été découvert dans la réaction $pp \rightarrow p\bar{p}p$. Dans cette expérience, un faisceau de protons est accéléré sur une cible fixe d'hydrogène liquide.

- a) Quelle doit être l'énergie minimale du faisceau de protons pour que cette réaction soit possible ?
- b) Même question si on collisionne deux faisceaux de protons de même énergie.

Introduction

Nous allons maintenant commencer la construction du cadre formel de la physique des particules. Dans ce chapitre, nous allons tenter d'étendre la mécanique quantique pour décrire des systèmes où le nombre et la nature des particules sont modifiés et introduire le concept de champ quantifié.

Objectifs

- Connaître** le lien entre la notion quantique de bosons et fermions et les règles de commutation des opérateurs de champ.
- Identifier** le rôle de l'opérateur de champ comme extension du concept de fonction d'onde.
- Définir** les opérateurs de création et d'annihilation et l'opérateur de champ.
- Expliquer** comment décrire un système quantique dont le nombre de particules est variable.

Plan

- 1 Ensemble de particules identiques
- 2 Représentation des états d'occupation
- 3 Opérateurs de création et d'annihilation
- 4 Construction d'opérateurs
- 5 Opérateurs de champ

1

Ensemble de particules identiques

1.1 Bosons et fermions

L'un des postulats de la mécanique quantique est l'existence de particules indiscernables. Les observables physiques d'un système de particules indiscernables sont invariantes sous les permutations de plusieurs particules.

Soit un système de n particules identiques, il est décrit par une fonction d'onde $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, où chaque vecteur \vec{x}_i caractérise chacune des particules (position, spin, ...). On considère un opérateur de permutation \mathbb{P} tel que $\mathbb{P}\psi$ est une fonction d'onde du système où plusieurs particules ont été interchangées. Pour une observable physique associée à un opérateur A , l'hypothèse d'indiscernabilité impose :

$$\langle \psi | \mathbb{P}^+ A \mathbb{P} | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle. \quad (3.1)$$

On admettra qu'il suffit pour cela que : $\mathbb{P}\psi = e^{i\alpha}\psi$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On vérifie alors que :

$$\langle \mathbb{P}\psi | A | \mathbb{P}\psi \rangle = \langle \psi | e^{-i\alpha} A e^{i\alpha} | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle. \quad (3.2)$$

Une permutation élémentaire \mathbb{P}_{ij} (avec $i \neq j$) inverse les deux éléments i et j . Toute permutation \mathbb{P} peut se décomposer de manière générique comme le produit de permutations élémentaires. On a alors :

$$\mathbb{P}_{ij}\psi = e^{i\alpha_{ij}}\psi, \text{ et } \mathbb{P} = \prod_{k=1}^p \mathbb{P}_{i_k j_k}. \quad (3.3)$$

Cette décomposition n'est pas forcément unique mais la parité du nombre de permutations binaires p est toujours la même. La parité de p définit la parité de la permutation (paire ou impaire).

Si on applique deux fois une permutation \mathbb{P}_{ij} on revient à l'état initial, $\mathbb{P}_{ij}^2 = \mathbb{1}$. En appliquant cet opérateur à une fonction d'onde ψ quelconque, il vient :

$$\mathbb{P}_{ij}^2\psi = \psi \Rightarrow e^{2i\alpha_{ij}}\psi = \psi \Rightarrow e^{2i\alpha_{ij}} = 1. \quad (3.4)$$

Il en résulte deux possibilités pour la fonction d'onde :

- $e^{i\alpha_{ij}} = +1$, la fonction d'onde ψ est symétrique (inchangée) par permutation.
- $e^{i\alpha_{ij}} = -1$, la fonction d'onde ψ est antisymétrique par permutation.

Ces deux comportements de la fonction d'onde à n particules indiscernables permettent de définir deux catégories de particules :

- les **bosons** qui vérifient pour toute permutation \mathbb{P} , $\mathbb{P}\psi = \psi$;
- les **fermions** qui vérifient $\mathbb{P}\psi = (-1)^{\delta_{\mathbb{P}}}\psi$, où $\delta_{\mathbb{P}} = 0$ si \mathbb{P} est paire, 1 sinon.

Cette définition des bosons et des fermions ne fait aucun lien avec le spin des particules qu'on utilise souvent pour caractériser les bosons (spin entier) et les fermions (spin demi-entier). On va voir que l'on retrouve néanmoins les propriétés connues pour chaque type de particules. La démonstration du théorème de connexion spin-statistique qui établit l'équivalence entre les deux définitions des bosons et des fermions se fait dans le cadre général de la théorie quantique des champs et sera très brièvement discutée à la fin du chapitre 4.

1.2 Fonction d'onde à plusieurs particules

Les équations de la mécanique quantique permettent généralement de déterminer la fonction d'onde d'une particule individuelle. L'ensemble des fonctions d'onde à une particule forme un espace de Hilbert \mathcal{H} . L'espace de Hilbert des fonctions d'onde de systèmes à n particules s'obtient par produits tensoriels successifs de \mathcal{H} , soit $\mathcal{H}_n = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H} = \mathcal{H}^{\otimes n}$. Si $\{\varphi_k(\vec{x})\}$ forme une base orthonormée de \mathcal{H} , alors tout état à n particules s'écrit comme une combinaison linéaire de produits de n fonctions φ_k . Dans le cas $n = 2$, si on considère deux particules discernables dans des états φ_a et φ_b ,

il existe deux états distincts à deux particules :

$$\psi_I(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) \text{ et } \psi_{II}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1). \quad (3.5)$$

Pour des particules indiscernables, les fonctions d'onde qui vérifient les conditions de symétries souhaitées sont des combinaisons linéaires de ψ_I et ψ_{II} . Pour les bosons, la fonction d'onde symétrique est :

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_I + \psi_{II}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) + \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)]. \quad (3.6)$$

De même, pour les fermions, la fonction d'onde antisymétrique est :

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_I - \psi_{II}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_a(\vec{x}_1)\varphi_b(\vec{x}_2) - \varphi_a(\vec{x}_2)\varphi_b(\vec{x}_1)]. \quad (3.7)$$

En généralisant à un nombre n quelconque de particules, ces fonctions d'onde deviennent :

$$\begin{aligned} \psi_S(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) &= C_S \sum_{\{\mathbb{P}\}} \mathbb{P} [\varphi_{a_1}(\vec{x}_1)\varphi_{a_2}(\vec{x}_2) \dots \varphi_{a_n}(\vec{x}_n)] \\ &= C_S \times \text{perm} \begin{pmatrix} \varphi_{a_1}(\vec{x}_1) & \dots & \varphi_{a_1}(\vec{x}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{a_n}(\vec{x}_1) & \dots & \varphi_{a_n}(\vec{x}_n) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \psi_A(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) &= C_A \sum_{\{\mathbb{P}\}} (-1)^{\delta_{\mathbb{P}}} \mathbb{P} [\varphi_{a_1}(\vec{x}_1)\varphi_{a_2}(\vec{x}_2) \dots \varphi_{a_n}(\vec{x}_n)] \\ &= C_A \times \det \begin{pmatrix} \varphi_{a_1}(\vec{x}_1) & \dots & \varphi_{a_1}(\vec{x}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{a_n}(\vec{x}_1) & \dots & \varphi_{a_n}(\vec{x}_n) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où les sommes portent sur toutes les permutations possibles des coordonnées \vec{x}_i . Les coefficients C_A et C_S sont des coefficients de normalisation qui assurent $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

La fonction d'onde antisymétrique est décrite par un déterminant dit **déterminant de Slater**. La fonction d'onde symétrique s'écrit de manière similaire à l'aide d'un permanent (déterminant sans alternance de signes).

Dans le cas de la fonction d'onde antisymétrique, si deux fonctions d'onde φ_{a_i} sont identiques alors il y a deux colonnes égales dans la matrice et le déterminant de Slater est nul. Ainsi deux fermions identiques ne peuvent pas être dans le même état quantique : on retrouve ici le principe d'exclusion de Pauli.

L'ensemble des fonctions d'onde symétriques (antisymétriques) à n particules forme un sous-espace de \mathcal{H}_n que l'on note $[\mathcal{H}_n]_S$ ($[\mathcal{H}_n]_A$). La construction des fonctions d'onde à n particules par les déterminants de Slater est souvent peu pratique, en particulier quand n devient grand. De plus dans ce formalisme, deux états à n_1 et n_2 particules sont décrits par des fonctions d'onde définies dans des espaces de Hilbert différents. Il est alors très difficile d'expliquer des opérateurs qui changent le nombre de particules d'un système comme ce sera le cas en physique des particules où le nombre et la nature

des particules sont modifiés lors d'une interaction (par exemple, la désintégration β du neutron $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$).

2 Représentation des états d'occupation

On suppose toujours la base $\{\varphi_k\}$ des états à une particule connue. Pour décrire un état à plusieurs particules ψ , il suffit de préciser :

- la nature bosonique ou fermionique des particules,
- l'ensemble des nombres n_k où l'état φ_k apparaît dans ψ . C'est le **nombre d'occupation** de l'état φ_k .

Un état à n particules peut donc être représenté par un ket :

$$|n_1, n_2, \dots\rangle \text{ avec } \sum_k n_k = n. \quad (3.10)$$

Pour les bosons, $n_k \in \mathbb{N}$, alors que pour les fermions, $n_k \in \{0, 1\}$.

Dans la pratique on ne note que les nombres d'occupation non nuls. Ainsi l'état vide s'écrit $| \rangle$. La figure 3.1 illustre la construction d'états d'occupation.

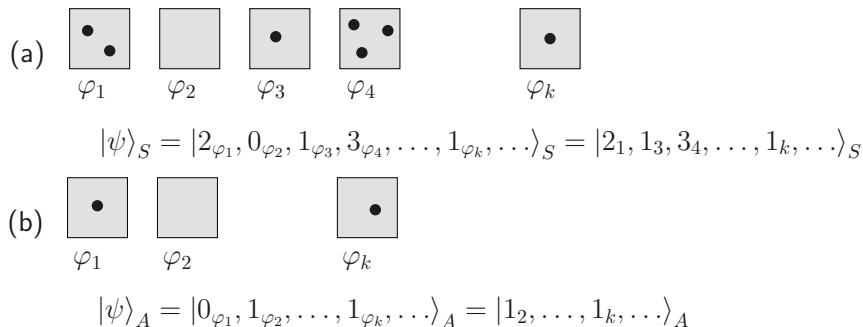


Figure 3.1– Exemple de construction d'états d'occupation bosonique (a) et fermionique (b).

L'ensemble $= \{| \rangle, \dots, |1_k\rangle, \dots, |1_k, 1_{k'}\rangle, \dots, |2_k\rangle, \dots\}$, de tous les états d'occupation, incluant toutes les valeurs de n (c'est-à-dire le vide et les états à une, deux, trois, ... particules) forme une base orthonormée d'un nouvel espace vectoriel appelé **espace de Fock** $\mathcal{F}_{S/A} = \bigoplus_n [\mathcal{H}_n]_{S/A}$. Les états $|n_1, n_2, \dots\rangle$ sont les états de Fock et

$$\langle n'_1, n'_2, \dots | n_1, n_2, \dots \rangle = \delta_{n'_1, n_1} \delta_{n'_2, n_2} \dots \quad (3.11)$$

Avec cette formulation, on dispose maintenant d'un unique espace de Hilbert qui contient tous les états pour toutes les multiplicités de particules. Il doit alors être possible de construire des opérateurs sur l'espace de Fock qui modifient le nombre de particules.

L'écriture effective de la fonction d'onde à n particules passe toujours, pour le moment, par un déterminant de Slater.

3 Opérateurs de création et d'annihilation

On va s'intéresser au cas particulier d'opérateurs sur l'espace de Fock qui font varier le nombre d'occupation d'un état d'une unité :

- les **opérateurs de création** : $n_k \rightarrow n_k + 1$
- les **opérateurs d'annihilation** : $n_k \rightarrow n_k - 1$

Il faut traiter séparément les cas des bosons et des fermions pour prendre en compte les différences de symétrie des fonctions d'onde.

3.1 Cas des bosons

L'opérateur d'annihilation b_k de l'état φ_k est défini tel que :

$$\begin{aligned} b_k | \dots, n_k, \dots \rangle &= \sqrt{n_k} | \dots, n_k - 1, \dots \rangle \text{ si } n_k > 0, \\ b_k | \dots, 0_k, \dots \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La seconde relation traduit le fait qu'il est impossible de détruire une particule qui n'existe pas. Il ne faut pas confondre 0 et l'état vide $|\rangle$ qui sont deux objets différents.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $|n_k\rangle \equiv |\dots, n_k, \dots\rangle$ un état quelconque avec n_k particules dans l'état φ_k . Les états de Fock étant orthonormés, les seuls éléments de matrice non nuls de b_k sont :

$$\langle n_k - 1 | b_k | n_k \rangle = \sqrt{n_k} \langle n_k | n_k \rangle = \sqrt{n_k}. \quad (3.13)$$

En prenant le complexe conjugué de cette expression, il vient :

$$\langle n_k - 1 | b_k | n_k \rangle^+ = \langle n_k | b_k^+ | n_k - 1 \rangle = \sqrt{n_k}. \quad (3.14)$$

Ce sont les seuls éléments de matrice non nuls de l'opérateur b_k^+ , complexe conjugué de b_k . Alors :

$$b_k^+ | n_k - 1 \rangle = \sqrt{n_k} | n_k \rangle, \quad (3.15)$$

ou encore :

$$b_k^+ | n_k \rangle = \sqrt{n_k + 1} | n_k + 1 \rangle. \quad (3.16)$$

Ceci correspond à un opérateur qui augmente le nombre d'occupation d'une unité, soit un opérateur de création. Les sous-matrices des opérateurs de création et d'annihilation

sont donc :

$$b_k^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ et } b_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Considérons maintenant l'opérateur $b_k^+ b_k$ appliqué à un état $|n_k\rangle$:

$$b_k^+ b_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} b_k^+ |n_k - 1\rangle = n_k |n_k\rangle \text{ et } b_k^+ b_k |0_k\rangle = 0 = 0. |n_k\rangle. \quad (3.18)$$

L'opérateur $b_k^+ b_k$ est diagonal et les états de Fock $|n_k\rangle$ sont des états propres de valeur propre n_k (nombre d'occupation de l'état). C'est l'opérateur du nombre d'occupation de l'état φ_k , noté \hat{n}_k . Il est intéressant de remarquer qu'un état quelconque $|\psi\rangle$ de l'espace de Fock est une combinaison linéaire d'états pouvant avoir des nombres d'occupation différents. Dans le cas général, le nombre de particules du système n'est pas défini. La grandeur $\langle\psi| \hat{n}_k |\psi\rangle$ est alors le nombre moyen de particules dans l'état φ_k .

De la même manière, on montre que l'opérateur $b_k b_k^+$ est également diagonal avec $b_k b_k^+ |n_k\rangle = (n_k + 1) |n_k\rangle$. On en déduit alors le commutateur :

$$[b_k, b_k^+]_- = b_k b_k^+ - b_k^+ b_k = \mathbb{1}. \quad (3.19)$$

Les règles de commutation pour les opérateurs de création et d'annihilation de bosons sont alors :

$$[b_i^+, b_j^+]_- = [b_i, b_j]_- = 0, \quad (3.20)$$

$$[b_i, b_j^+]_- = \delta_{ij} \mathbb{1}. \quad (3.21)$$

3.2 Cas des fermions

L'opérateur d'annihilation c_k d'un fermion dans l'état φ_k est défini par :

$$\begin{aligned} c_k |1_k\rangle &= (-1)^{\delta_k} |0_k\rangle, \\ c_k |0_k\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

où $\delta_k = \sum_{i < k} n_i$ est le nombre d'états occupés de rang inférieur à k . De manière analogue au cas bosonique, on en déduit les matrices des opérateurs c_k et c_k^+ :

$$c_k = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\delta_k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } c_k^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (-1)^{\delta_k} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

On vérifie encore que le complexe conjugué c_k^+ est bien un opérateur de création :

$$c_k^+ |0_k\rangle = (-1)^{\delta_k} |1_k\rangle \text{ et } c_k^+ |1_k\rangle = 0 \quad (3.24)$$

Cette dernière condition traduit le principe d'exclusion de Pauli : il est impossible de créer une seconde particule dans l'état φ_k . Considérons maintenant deux états φ_1 et φ_2 . En partant d'un état vide, on construit un état $|\psi\rangle$ en peuplant d'abord l'état 1 puis l'état 2

et un état ψ_b en peuplant d'abord l'état 2 puis l'état 1. Les états ψ_a et ψ_b s'obtiennent par permutation des deux particules et on doit donc vérifier $\psi_a = -\psi_b$. En utilisant les opérateurs c_1^+ et c_2^+ , il vient :

$$|\psi_a\rangle = c_2^+ c_1^+ |\rangle = c_2^+ |1_1\rangle = -|1_1, 1_2\rangle, \text{ car } n_1 = 1 \text{ d'où } \delta_2 = 1. \quad (3.25)$$

$$|\psi_b\rangle = c_1^+ c_2^+ |\rangle = c_1^+ |1_2\rangle = |1_1, 1_2\rangle, \text{ car } \delta_1 = 0. \quad (3.26)$$

On retrouve le résultat attendu, ce qui justifie *a posteriori* le facteur $(-1)^{\delta_k}$ qui permet de rendre compte du caractère antisymétrique de la fonction d'onde dans la définition des opérateurs de création et d'annihilation. On en déduit la relation :

$$c_n^+ c_{n'}^+ + c_{n'}^+ c_n^+ = 0. \quad (3.27)$$

Le nombre d'occupation est également donné par le produit $c_k^+ c_k = \hat{n}_k$:

$$\left. \begin{array}{l} c_k^+ c_k |0_k\rangle = 0 \\ c_k^+ c_k |1_k\rangle = |1_k\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow c_k^+ c_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle, \quad (3.28)$$

et

$$\left. \begin{array}{l} c_k c_k^+ |0_k\rangle = |1_k\rangle \\ c_k c_k^+ |1_k\rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_k c_k^+ |n_k\rangle = (1 - n_k) |n_k\rangle. \quad (3.29)$$

On en déduit une relation d'anticommuation analogue à la relation de commutation des bosons :

$$\{c_k, c_k^+\} = [c_k, c_k^+]_+ = c_k c_k^+ + c_k^+ c_k = \mathbb{1}. \quad (3.30)$$

Finalement les opérateurs de création et d'annihilation des fermions sont caractérisés par leurs relations d'anticommuation :

$$[c_i^+, c_j^+]_+ = [c_i, c_j]_+ = 0, \quad (3.31)$$

$$[c_i, c_j^+]_+ = \delta_{ij} \mathbb{1}. \quad (3.32)$$

Dans la représentation des états d'occupation, tout état à n particules identiques peut se construire par application successive des opérateurs de création et d'annihilation sur un état de référence (on prendra généralement l'état vide). La nature bosonique ou fermionique des particules du système se traduit dans l'utilisation d'opérateurs vérifiant les propriétés de commutation (bosons) ou d'anticommuation (fermions). Dans un calcul, si la nature bosonique ou fermionique ne joue pas de rôle, on utilisera la notation a_k et a_k^+ pour désigner ces opérateurs.

3.3 Changement de base

La construction des opérateurs de création et d'annihilation est associée à une base orthonormée $\{\varphi_k\}$ des états à une particule. Si l'on choisit une autre base $\{\tilde{\varphi}_k\}$, les nombres d'occupation \tilde{n}_k dans cette nouvelle base sont évidemment différents. Il faut

donc définir de nouveaux opérateurs \tilde{a}_k et \tilde{a}_k^+ . On a alors :

$$\tilde{\varphi}_k(\vec{x}) = \sum_m \alpha_{mk} \varphi_m(\vec{x}) \text{ avec } \alpha_{mk} = \langle \varphi_m(\vec{x}) | \tilde{\varphi}_k(\vec{x}) \rangle, \quad (3.33)$$

$$|\varphi_k\rangle = a_k^+ |1_k\rangle, \quad (3.34)$$

$$|\tilde{\varphi}_k\rangle = \tilde{a}_k^+ |\tilde{1}_k\rangle. \quad (3.35)$$

D'où finalement :

$$\tilde{a}_k^+ |1\rangle = |\tilde{1}_k\rangle = \sum_m \alpha_{mk} |1_m\rangle = \sum_m \alpha_{mk} a_m^+ |1\rangle. \quad (3.36)$$

En généralisant le raisonnement à un ket quelconque, on obtient les relations de changement de base pour les opérateurs a_k et a_k^+ :

$$\tilde{a}_k^+ = \sum_m \alpha_{mk} a_m^+, \quad (3.37)$$

$$\tilde{a}_k = \sum_m \alpha_{mk}^* a_m. \quad (3.38)$$

On vérifie ensuite que les nouveaux opérateurs ainsi définis satisfont toujours aux relations de (anti)commutation (voir exercice 3.1).

4

Construction d'opérateurs

4.1 Expression d'observables à partir de a_k et a_k^+

Les états d'occupation formant une base de l'espace de Fock, tout état $|\psi\rangle$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des états de Fock :

$$|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n |n\rangle, \quad (3.39)$$

où l'indice n désigne une configuration d'occupation $\{n_1, n_2, \dots\}$, la somme portant sur toutes les configurations (*i.e.* tous les états de Fock). Une observable physique est associée à un opérateur \hat{A} agissant sur l'espace de Fock. Les éléments de matrice de \hat{A} sont donnés par :

$$\langle \psi' | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_{m,n} \lambda_m^* \lambda_n \langle m | \hat{A} | n \rangle. \quad (3.40)$$

Or le seul moyen de passer d'un état $|n\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$ à un état $|m\rangle = |m_1, m_2, \dots\rangle$ est de détruire n_1 particules dans l'état φ_1 et d'en créer m_1 , puis de procéder de même pour chaque état. Ceci revient soit à créer $m_1 - n_1$ particules si $m_1 > n_1$, soit à détruire $n_1 - m_1$ particules si $m_1 < n_1$. En notant $j_k = \min(n_k, m_k)$, les seuls éléments de matrice non nuls de \hat{A} sont alors nécessairement de la forme :

$$\langle m | \hat{A} | n \rangle = K \left\langle m_1, m_2, \dots \left| \prod_k (a_k^+)^{m_k - j_k} (a_k)^{n_k - j_k} \right| n_1, n_2, \dots \right\rangle, \quad (3.41)$$

où K est une constante numérique. Ainsi tout opérateur \hat{A} peut s'écrire sous la forme d'un polynôme d'opérateurs de création et d'annihilation, $\hat{A} = p(a_k, a_k^+)$. L'expression explicite de ce polynôme peut s'obtenir en identifiant les termes dans le calcul des éléments de matrice :

$$\begin{aligned}\langle \psi' | \hat{A} | \psi \rangle &= \int \psi'^*(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \hat{A}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) dx_1 \dots dx_n \\ &\equiv \sum_{m,n} \lambda_m'^* \lambda_n \langle m | p(a_k, a_k^+) | n \rangle.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Cette approche est toujours utilisable mais conduit souvent à des calculs ardu. À titre d'exemple, nous allons nous limiter au cas de deux particules en interaction, ce qui correspond à une approche très générale des problèmes de diffusion.

4.2 Hamiltonien avec interaction

On va considérer le cas très général de la diffusion de deux fermions identiques (par exemple, la diffusion coulombienne de deux électrons). Le hamiltonien le plus général pour ce problème est de la forme :

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \hat{\mathcal{T}}(\vec{x}_1) + \hat{\mathcal{T}}(\vec{x}_2) + \hat{\mathcal{U}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \quad (3.43)$$

où $\hat{\mathcal{T}}$ est la partie cinétique du hamiltonien qui caractérise l'évolution libre des particules (en mécanique quantique, $\hat{\mathcal{T}} = \frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + v(x)$ où v est un potentiel extérieur) et $\hat{\mathcal{U}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ est le hamiltonien d'interaction entre les particules (un potentiel coulombien s'écrirait $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$). On considère une base quelconque $\{\varphi_i\}$ de l'espace des états à une particule. En définissant les éléments de matrice :

$$t_{ij} = \int \varphi_i^*(\vec{x}) \hat{\mathcal{T}}(\vec{x}) \varphi_j(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (3.44)$$

$$u_{ijkl} = \int \varphi_i^*(\vec{x}_1) \varphi_j^*(\vec{x}_2) \hat{\mathcal{U}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \varphi_k(\vec{x}_1) \varphi_l(\vec{x}_2) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2, \quad (3.45)$$

le hamiltonien s'écrit :

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{ij} t_{ij} c_i^+ c_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} u_{ijkl} c_i^+ c_j^+ c_k c_l, \quad (3.46)$$

où c_i et c_i^+ sont les opérateurs création et annihilation. Ce résultat sera démontré dans un cas particulier dans l'exercice 3.2.

Le premier terme s'interprète comme la propagation libre d'une particule (incluant la diffusion de la particule sur le potentiel $v(x)$). Le second terme correspond à la diffusion entre deux particules de l'état initial $|kl\rangle$ vers l'état final $|ij\rangle$.

En prenant l'exemple de la diffusion coulombienne de deux électrons dans une boîte de volume Ω soumis à un potentiel extérieur $v(\vec{x})$, le hamiltonien devient :

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=1,2} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_i^2 + v(\vec{x}_i) \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \quad (3.47)$$

Les états propres pour un électron libre sont des ondes planes d'impulsion \vec{k} définie (modes de Fourier). Les opérateurs création (annihilation) sont donc les opérateurs qui créent (annihilent) un électron d'impulsion \vec{k} . En prenant ces états comme base, le hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation s'écrit :

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{\vec{k}} -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} c_{\vec{k}}^+ c_{\vec{k}}}_{(a)} + \underbrace{\sum_{\vec{k}, \vec{q}} v(\vec{q}) c_{\vec{k}+\vec{q}}^+ c_{\vec{k}}}_{(b)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', \vec{q}} \frac{e^2}{\Omega 4\pi \epsilon_0 q^2} c_{\vec{k}+\vec{q}}^+ c_{\vec{k}'-\vec{q}}^+ c_{\vec{k}} c_{\vec{k}'}}_{(c)}$$

où $v(\vec{q})$ est le potentiel dans l'espace de Fourier ($v(\vec{q}) = \int \frac{v(\vec{x})}{\Omega} e^{-i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$). Chaque terme peut être interprété comme :

- (a) la propagation libre de l'électron : création et annihilation du même état d'impulsion.
- (b) la diffusion d'un électron d'impulsion \vec{k} sur le potentiel extérieur avec un transfert d'impulsion \vec{q} : annihilation de l'état initial d'impulsion \vec{k} et création de l'état final d'impulsion $\vec{k} + \vec{q}$.
- (c) l'interaction coulombienne entre deux électrons d'impulsion \vec{k} et \vec{k}' avec un transfert d'impulsion \vec{q} : annihilation des états initiaux puis création des états finals.

Ces différentes interactions sont représentées sur la figure 3.2.

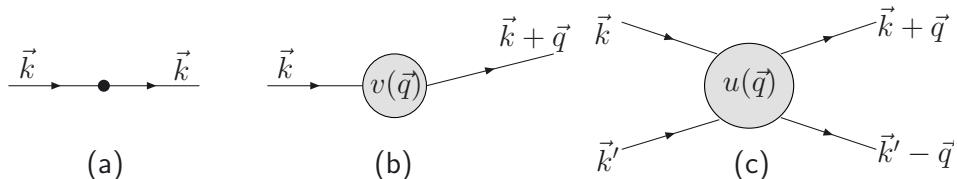


Figure 3.2 – Diffusion coulombienne : (a) propagation libre - (b) diffusion sur le potentiel extérieur - (c) diffusion entre 2 particules.

5 Opérateurs de champ

La mécanique quantique traite le temps et l'espace de manière radicalement différente. Or, l'un des principes de la relativité restreinte est de traiter sur un pied d'égalité ces deux grandeurs en étendant l'espace euclidien à l'espace-temps de Minkowski. La construction d'une théorie quantique relativiste doit donc concilier deux approches très différentes de l'espace et du temps. L'extension naïve d'une fonction d'onde sur l'espace à trois dimensions à l'espace-temps va faire que $\int \varphi(\vec{x}, t)^* \varphi(\vec{x}, t) d\vec{x} \neq 1$ n'est plus constant au cours du temps. L'interprétation de la fonction d'onde comme l'amplitude de probabilité de présence de la particule ne sera plus possible, ce qui limite

l'intérêt de ce concept. Pour pallier ce problème on définit les **opérateurs de champ** par :

$$\Psi(\vec{x}) = \sum_n a_n \varphi_n(\vec{x}) = \sum_n a_n \langle \vec{x} | \varphi_n \rangle, \quad (3.48)$$

$$\Psi^+(\vec{x}) = \sum_n a_n^+ \varphi_n^*(\vec{x}) = \sum_n a_n^+ \langle \varphi_n | \vec{x} \rangle. \quad (3.49)$$

Chaque terme de la somme correspond à un opérateur d'annihilation ou de création de l'état k , pondéré par l'amplitude de probabilité de trouver la particule dans l'état k au point \vec{x} . La somme sur tous les états permet de rendre compte de la création ou de l'annihilation d'une particule au point \vec{x} dans un état quelconque. Ces opérateurs possèdent les mêmes propriétés de (anti)commutation que les opérateurs de création et d'annihilation :

$$[\Psi(\vec{x}), \Psi(\vec{x}')]_{\pm} = \sum_{m,n} [a_m, a_n]_{\pm} \varphi_m(\vec{x}) \varphi_n(\vec{x}') = 0, \quad (3.50)$$

$$[\Psi^+(\vec{x}), \Psi^+(\vec{x}')]_{\pm} = \sum_{m,n} [a_m^+, a_n^+]_{\pm} \varphi_m^*(\vec{x}) \varphi_n^*(\vec{x}') = 0, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} [\Psi(\vec{x}), \Psi^+(\vec{x}')]_{\pm} &= \sum_{m,n} [a_m, a_n^+]_{\pm} \varphi_m(\vec{x}) \varphi_n^*(\vec{x}') \\ &= \sum_n \varphi_n(\vec{x}) \varphi_n^*(\vec{x}') = \delta(\vec{x}, \vec{x}'). \end{aligned} \quad (3.52)$$

De plus, l'opérateur $\Psi^+(\vec{x})\Psi(\vec{x})$ vérifie :

$$\begin{aligned} \int \Psi^+(\vec{x})\Psi(\vec{x}) d\vec{x} &= \sum_{m,n} a_m^+ a_n \int \varphi_m^*(\vec{x}) \varphi_n(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \sum_m a_m^+ a_m = \sum_m \hat{n}_m = \hat{N}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

\hat{N} est l'opérateur du nombre total de particules. $\Psi^+(\vec{x})\Psi(\vec{x})$ peut donc s'interpréter comme un opérateur de densité de particules au point \vec{x} . L'opérateur Ψ permet d'étendre la notion de probabilité de présence associée à la fonction d'onde. Il faut néanmoins noter que la grandeur intégrée n'est plus une fonction mais un opérateur. Pour un opérateur unaire $\hat{H}(\vec{x})$ quelconque, on peut définir un opérateur \hat{H} :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \Psi^+(\vec{x}) \hat{H}(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \sum_{m,n} a_m^+ a_n \int \varphi_m^*(\vec{x}) \hat{H}(\vec{x}) \varphi_n(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \sum_{m,n} h_{mn} a_m^+ a_n. \end{aligned} \quad (3.54)$$

De même, pour un opérateur binaire, $\hat{U}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$:

$$\begin{aligned}\hat{U} &= \int \Psi^+(\vec{x}_1) \Psi^+(\vec{x}_2) \hat{U}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \Psi(\vec{x}_2) \Psi(\vec{x}_1) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \\ &= \sum_{i,j,k,l} u_{ij,kl} a_i^+ a_j^+ a_k a_l.\end{aligned}\tag{3.55}$$

On retrouve la même forme d'expression que pour le calcul de la valeur moyenne d'un opérateur sur les fonctions d'onde. L'opérateur Ψ va présenter des propriétés analogues à celles de la fonction d'onde. Le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique se fait en transformant les observables physiques d'une fonction de l'espace en un opérateur agissant sur une fonction d'onde. Ici, l'étape suivante de complexification de la théorie consiste à remplacer la fonction d'onde par un opérateur de champ. C'est pourquoi on parle de seconde quantification. La théorie qui décrit l'évolution spatio-temporelle et l'interaction entre champs quantifiés est la théorie quantique des champs. Ce n'est que dans ce formalisme que l'on peut décrire des objets quantiques relativistes.

Les points clefs du chapitre

- 1 L'existence de particules indiscernables est un postulat de la mécanique quantique. Il se traduit par la symétrie (bosons) ou l'antisymétrie (fermions) de la fonction d'onde d'un système de plusieurs particules sous la permutation de deux particules.
- 2 L'antisymétrie de la fonction d'onde d'un système de fermions conduit au principe d'exclusion de Pauli soit l'impossibilité d'avoir deux fermions dans le même état quantique.
- 3 L'espace de Fock permet d'unifier en un unique espace vectoriel les espaces de Hilbert des fonctions d'onde symétriques ou antisymétriques à n particules (n fixé). Cet espace permet de construire des opérateurs qui modifient le nombre de particules. La base de l'espace de Fock, constituée de l'ensemble des bases des espaces de Hilbert des fonctions d'onde à n particules, forme la représentation des états d'occupation.
- 4 Les opérateurs création a_k^+ et annihilation a_k sont les opérateurs sur l'espace de Fock qui font varier d'une unité en plus ou en moins l'occupation de l'état k . Ils vérifient des propriétés particulières de commutation pour un système de bosons et d'anticommutation pour un système de fermions. Ils sont normalisés de sorte que $\hat{n}_k = a_k^+ a_k$ soit l'opérateur dont les valeurs propres sont les nombres d'occupations de l'état k .
- 5 Tout opérateur en mécanique quantique peut s'écrire comme un polynôme des opérateurs création et annihilation. En particulier l'interaction entre deux particules conduisant à des changements d'état (échange d'impulsion par exemple) va faire intervenir les opérateurs qui annihilent les particules initiales et créent les particules finales.
- 6 L'opérateur de champ $\Psi(x)$ est construit comme l'opérateur annihilant ou créant un état au point x avec un poids donné par l'amplitude de probabilité de présence en ce point (fonction d'onde).



Entraînez-vous

3.1 Opérateurs création et annihilation

Soit deux bases orthonormées $\{\varphi_k\}$ et $\{\tilde{\varphi}_k\}$ de l'espace des états à une particule, avec :

$$\tilde{\varphi}_k(\vec{x}) = \sum_m \alpha_{mk} \varphi_m(\vec{x}) \text{ avec } \alpha_{mk} = \langle \varphi_m(\vec{x}) | \tilde{\varphi}_k(\vec{x}) \rangle.$$

Montrez que les opérateurs :

$$\tilde{a}_k^+ = \sum_m \alpha_{mk} a_m^+, \quad \tilde{a}_k = \sum_m \alpha_{mk}^* a_m,$$

vérifient les relations de commutation des opérateurs création et annihilation.

3.2 Hamiltonien en opérateurs création et annihilation

Soit un système composé de deux fermions en interaction, décrit par le hamiltonien :

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \hat{\mathcal{T}}(\vec{x}_1) + \hat{\mathcal{T}}(\vec{x}_2) + \hat{U}(\vec{x}_1, \vec{x}_2),$$

où $\hat{\mathcal{T}}$ est la partie libre et \hat{U} l'interaction entre les particules. On considère une base propre $\{\varphi_k\}$ de $\hat{\mathcal{H}}$. Les états à une particule, pour chaque fermion sont notés $|\varphi_\alpha\rangle = |1_\alpha\rangle$ et $|\varphi_\beta\rangle = |1_\beta\rangle$. En définissant les éléments de matrice :

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta} &= \int \varphi_\alpha^*(\vec{x}) \hat{\mathcal{T}}(\vec{x}) \varphi_\beta(\vec{x}) d\vec{x}, \\ u_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= \int \varphi_\alpha^*(\vec{x}_1) \varphi_\beta^*(\vec{x}_2) \hat{U}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \varphi_\gamma(\vec{x}_1) \varphi_\delta(\vec{x}_2) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2. \end{aligned}$$

a) Donnez l'expression de la fonction d'onde à deux particules.

b) Donnez l'expression des éléments de matrice non nuls du hamiltonien en fonction de :

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta} &= \int \varphi_\alpha^*(\vec{x}) \hat{\mathcal{T}}(\vec{x}) \varphi_\beta(\vec{x}) d\vec{x}, \\ u_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= \int \varphi_\alpha^*(\vec{x}_1) \varphi_\beta^*(\vec{x}_2) \hat{U}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \varphi_\gamma(\vec{x}_1) \varphi_\delta(\vec{x}_2) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2. \end{aligned}$$

c) En introduisant l'opérateur \hat{n}_k , exprimez le hamiltonien en fonction des opérateurs création et annihilation.

Champs quantiques libres

Introduction

En partant d'une définition des bosons et des fermions basée sur la symétrie de la fonction d'onde, nous venons de construire des opérateurs particuliers, les opérateurs de champs, qui se comportent comme une extension de la fonction d'onde. Nous allons maintenant construire ces mêmes opérateurs à partir de la mécanique analytique et de la relativité restreinte et ainsi justifier que c'est cet objet, le champ quantifié, qui est pertinent pour décrire un objet physique quantique et relativiste.

Un lagrangien invariant sous les transformations du groupe de Lorentz-Poincaré satisfait toutes les propriétés de conservation usuelles (quadri-impulsion, moment cinétique, masse et spin). De plus, l'invariance sous une classe de transformations impose l'impossibilité de fixer une origine absolue. Il est donc impossible de fixer une origine pour les coordonnées d'espace-temps, les directions dans l'espace (isotropie de l'espace), les vitesses (principe de relativité) du fait de l'invariance de Lorentz-Poincaré.

Objectifs

Connaître les équations de la mécanique quantique relativiste et les solutions pour les champs en l'absence d'interaction.

Définir les équations de Klein-Gordon, Dirac et Maxwell ainsi que la quantification du champ.

Expliquer les limitations d'une théorie quantique relativiste, le concept d'antiparticules et la nécessité de la théorie quantique des champs.

Expliquer la relation entre l'invariant relativiste de spin et la représentation mathématique du champ associé.

Plan

- 1 Champ scalaire
- 2 Champ spinoriel
- 3 Champ vectoriel
- 4 Spin et représentations
- 5 Quantification du champ

1 Champ scalaire

1.1 Équation de Klein-Gordon

Le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique s'opère en remplaçant les observables physiques par des opérateurs. L'équation de Schrödinger n'est que la traduction dans ce nouveau formalisme du hamiltonien classique.

$$E = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow \left. \begin{array}{l} E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \end{array} \right\} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \varphi. \quad (4.1)$$

Schrödinger

De la même manière, à partir du hamiltonien relativiste libre, on peut construire une équation analogue à celle de Schrödinger, soit en unités naturelles :

$$\left. \begin{array}{l} E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} = i\partial_0 \\ E^2 = m^2 + p^2 \longrightarrow \vec{p} \rightarrow \vec{\nabla} = -i \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \end{array} \right\} -\partial_0 \partial^0 \varphi = (m^2 + \partial_i \partial^i) \varphi \\ \Rightarrow (m^2 + \partial_\mu \partial^\mu) \varphi = 0. \quad (4.2)$$

C'est l'équation de **Klein-Gordon**. Elle dérive du lagrangien de Klein-Gordon, par les équations d'Euler-Lagrange :

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi(x)^2). \quad (4.3)$$

Ce lagrangien ne fait apparaître le champ que dans des termes du second degré. Tout terme d'ordre supérieur traduirait une interaction. Le terme de masse dans ce lagrangien peut s'interpréter classiquement comme une énergie potentielle. L'état du vide, c'est-à-dire l'état du champ en l'absence de particule, est donné par le minimum du potentiel, soit pour $\varphi(x) = 0$.

L'objet $\varphi(x)$ qui apparaît dans cette équation doit être une fonction d'onde relativiste. Cependant le traitement sensiblement différent du temps en mécanique quantique et en théorie des champs relativiste nous incite à penser que cet objet risque de poser des problèmes d'interprétation. Le champ scalaire n'a pas d'autre degré de liberté. Il ne saurait donc modéliser une particule portant un spin. Le champ scalaire est donc un champ de spin 0. L'équation de Klein-Gordon est l'équation relativiste du champ scalaire libre.

1.2 Limitations de l'équation de Klein-Gordon

En mécanique quantique, l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde découle de l'équation de continuité (cf. chapitre 2). Livrons-nous à l'exercice similaire à partir de l'équation de Klein-Gordon. Pour ce faire, multiplions l'équation d'un champ φ par

le complexe conjugué φ^* :

$$\varphi^* \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi^* \varphi = 0 \quad (4.4)$$

En soustrayant son complexe conjugué à cette expression :

$$0 = \varphi^* \partial_\mu \partial^\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \partial^\mu \varphi^* = \partial_\mu (\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*) \quad (4.5)$$

On obtient bien une équation de la forme $\partial_\mu j^\mu = 0$ avec pour le quadricourant :

$$j^\mu = \frac{-i}{2m} (\varphi^* \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu \varphi^*)$$

La normalisation de j^μ est choisie analogue à celle de la mécanique quantique (avec ici $\hbar = 1$). La densité,

$$\rho = j^0 = \frac{-i}{2m} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right)$$

n'est plus nécessairement positive et l'interprétation probabiliste, qui est l'un des fondements de la mécanique quantique, n'est plus possible.

Un autre problème apparaît lors de la résolution de l'équation de Klein-Gordon. On cherche des solutions en ondes planes de la forme $\varphi \propto e^{-ikx}$, avec k et x des quadrivecteurs. En injectant ceci dans l'équation de Klein-Gordon, il vient :

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0 \Rightarrow \left[(-ik_0)^2 - (i\vec{k})^2 + m^2 \right] e^{-ikx} = 0 \quad (4.6)$$

$$\implies k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \pm E_k. \quad (4.7)$$

Pour une impulsion \vec{k} , il existe deux solutions possibles :

- une solution d'énergie positive $E = E_k$: $\varphi_k^+(x) = A_k e^{-i(E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$;
- une solution d'énergie négative $E = -E_k$: $\varphi_k^-(x) = B_k e^{-i(-E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$.

L'existence de ces deux solutions est liée à la nature quadratique de l'équation reliant énergie et impulsion en relativité restreinte ($E^2 = m^2 + p^2$).

A priori, les solutions d'énergie négative n'ont pas d'interprétation physique. Les deux phénomènes que nous avons mis en évidence (absence d'interprétation probabiliste de la densité et existence de solutions d'énergie négative) constituent un sérieux problème de la mécanique quantique relativiste qui ne peut se résoudre que dans le contexte, plus large, de la théorie quantique des champs.

Calculons la densité pour chaque type de solution :

$$\rho^+ = \frac{|A_k|^2}{2m} E_k \quad \rho^- = -\frac{|B_k|^2}{2m} E_k \quad (4.8)$$

Supposons que notre système soit composé de particules électriquement chargées, de charge $-e$. Si on multiplie la densité par la charge, on obtient la densité de charge qui elle peut être positive ou négative.

$$\rho_e^+ = \frac{-e|A_k|^2}{2m} E_k \quad \rho_e^- = \frac{e|B_k|^2}{2m} E_k \quad (4.9)$$

Les solutions d'énergie positive ont une charge $-e$ alors que celle d'énergie négative ont une charge opposée $+e$. Les solutions d'énergie négative correspondent aux antiparticules. Il est remarquable que si l'on suppose l'existence d'une particule chargée alors l'équation relativiste décrit automatiquement cette particule et un autre objet de même masse, de même spin et de charge opposée. L'interprétation en terme de particule et d'antiparticule permet de donner un sens physique aux solutions d'énergie négative : l'énergie est toujours positive mais le temps est inversé (on change l'attribution du signe $-$ dans $-E_k t$ de E_k à t) ce qui correspond à une particule d'impulsion \vec{k} qui remonte le temps. La quantification du champ qui sera brièvement discutée au paragraphe 5 permet d'introduire le concept d'antiparticule pour donner un sens physique à ces solutions : une antiparticule (inversion de toutes les charges) d'impulsion \vec{k} qui avance dans le temps est équivalente à une particule d'impulsion $-\vec{k}$ qui remonte le temps. Les deux solutions en onde plane sont alors :

$$\varphi_k^{(+)}(x) = a_k e^{-ik_\mu x^\mu} \quad (4.10)$$

pour les particules et :

$$\varphi_k^{(-)}(x) = b_k^* e^{ik_\mu x^\mu} \quad (4.11)$$

pour les antiparticules où les coefficients complexes sont donnés par $a_k = A_k$ et $b_k^* = B_{-k}$.

La solution la plus générale de l'équation de Klein-Gordon classique, développée sur une base d'ondes planes, est de la forme :

$$\varphi(x) = \int d^3k \varphi^{(-)} + \int d^3k \varphi_k^-(x) \quad (4.12)$$

ou encore, sous forme covariante :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{(2E_k)^{\frac{1}{2}}} (a_k e^{-ikx} + b_k^* e^{ikx}), \quad (4.13)$$

où la normalisation $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$ résulte de la normalisation de l'intégrale volumique continue

et le facteur $\frac{1}{(2E_k)^{\frac{1}{2}}}$ de l'intégration sur la contrainte relativiste $\delta(E_k^2 + \vec{k}^2 - m^2)$.

Un champ scalaire complexe décrit une particule (et son antiparticule) chargée. Pour un champ réel, $\varphi = \varphi^+$ et $\rho = 0$: la densité de charge est nulle. Une tel champ décrit une particule sans charge, qui est sa propre antiparticule. La solution de l'équation de

Klein-Gordon pour le champ réel est alors :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{(2E_k)^{\frac{1}{2}}} (a_k e^{-ikx} + a_k^* e^{ikx}). \quad (4.14)$$

2 Champ spinoriel

2.1 Équation de Dirac

Les phénomènes non physiques résultent de la dérivée seconde en temps dans l'équation de Klein-Gordon, là où l'équation de Schrödinger fait apparaître une dérivée première. Nous allons donc tenter de construire une équation relativiste sur le modèle de l'équation de Schrödinger : $i\partial_0\psi = H_f\psi$, où H_f est l'opérateur hamiltonien du système. Pour un champ scalaire, l'équation relativiste est quadratique, le champ devra être un objet mathématiquement plus complexe. On considère donc un vecteur à n composantes ψ . Chaque composante est un nombre complexe qui doit satisfaire l'équation de Klein-Gordon. Pour assurer l'invariance de forme sous les transformations de Lorentz, toutes les coordonées doivent être traitées de manière similaire, le hamiltonien ne peut dépendre que des dérivées premières du champ et doit inclure une énergie de masse proportionnelle au champ. On cherche donc une équation de la forme :

$$i\partial_0\psi = i\hat{\alpha}^i\partial_i\psi + \hat{\beta}m\psi. \quad (4.15)$$

Les coefficients $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}$ sont des matrices carrées de dimension n . Chaque composante de ψ doit vérifier :

$$\partial_\mu\partial^\mu\psi_i + m^2\psi_i = 0. \quad (4.16)$$

L'équation (4.15) permet de déterminer l'opérateur $\partial_0\partial^0$ en fonction des dérivées d'espace et des coefficients :

$$\partial_0\partial^0 = -H_f^2 = - (i\hat{\alpha}^i\partial_i + \hat{\beta}m)^2. \quad (4.17)$$

Soit :

$$\partial_0\partial^0\psi + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\hat{\alpha}^i\hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j\hat{\alpha}^i) \partial_i\partial^j\psi + i\frac{1}{2} \sum_i (\hat{\alpha}^i\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^i) \partial_i + \hat{\beta}^2 m^2\psi. \quad (4.18)$$

En identifiant avec l'équation de Klein-Gordon, on déduit des relations d'anticommutation entre les coefficients :

$$\{\hat{\alpha}^i, \hat{\alpha}^j\} = 2\delta_{i,j}\mathbb{1}_n \quad \{\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}\} = 0 \quad \hat{\beta}^2 = 1 \quad (4.19)$$

On voit que $\hat{\alpha}^i\hat{\alpha}^i = \hat{\beta}^2 = 1$, ces matrices ne peuvent donc avoir pour valeurs propres que ± 1 . En multipliant la seconde relation par $\hat{\beta}$ et en calculant la trace, il vient :

$$Tr(\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta} + \hat{\beta}^2\hat{\alpha}^i) = Tr(\hat{\beta}\hat{\alpha}^i\hat{\beta}) + Tr(\hat{\alpha}^i) = 2Tr(\hat{\alpha}^i) = 0. \quad (4.20)$$

De même, $Tr(\hat{\beta}) = 0$. Puisque la trace est égale à la somme des valeurs propres, il faut qu'il y ait autant de valeurs propres +1 que -1, soit une dimension paire pour ces matrices. Pour $n = 2$, il n'existe que 3 matrices 2×2 satisfaisant les conditions d'anticommulation (4.19), à savoir les matrices de Pauli. La dimension minimale pour les coefficients de l'équation est donc $n = 4$. La fonction d'onde vectorielle ψ est un objet à quatre dimensions appelé **spineur de Dirac** ou spineur de Lorentz et l'équation du champ est l'**équation de Dirac**. Pour l'écrire sous une forme covariante, on pose :

$$\gamma^0 = \hat{\beta}, \quad \gamma^i = \hat{\beta} \hat{\alpha}^i. \quad (4.21)$$

Les relations d'anticommulation (4.19) deviennent :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g_{\mu\nu}\mathbb{1}_4, \quad \gamma^{0^2} = -\gamma^{i^2} = 1 \quad (4.22)$$

et l'équation de Dirac s'écrit finalement :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (4.23)$$

Les quatre matrices sont les matrices de Dirac. Elles forment un quadrivecteur de matrices 4×4 ($\gamma^0, \vec{\gamma}$). Il existe une infinité de groupes de quatre matrices vérifiant ces relations. Le choix d'une représentation particulière revient à un choix de base de l'espace des spineurs. On montre que les propriétés physiques sont indépendantes de ce choix. La représentation standard des matrices de Dirac est :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

La structure en blocs de ces matrices incite souvent à traiter les spineurs comme un ensemble de deux objets à deux composantes : $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$.

2.2 Densité et courant

Comme précédemment, on peut dériver une équation de continuité à partir de l'équation de Dirac. Pour ce faire on part de l'équation (4.23) que l'on multiplie à gauche par $\psi^+ \gamma^0$:

$$i\psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^+ \gamma^0 \psi = 0. \quad (4.26)$$

En soustrayant le complexe conjugué de cette expression, les termes de masse disparaissent et on obtient la relation :

$$i(\psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi) = i\partial_\mu (\psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi) = \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.27)$$

L'expression $j^\mu = \psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi$ est bien un quadrivecteur, le quadricourant. La densité,

$$\rho = j^0 = \psi^+ \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^+ \psi \quad (4.28)$$

est toujours positive : on a bien résolu l'une des limitations de l'équation de Klein-Gordon. On verra cependant que les solutions d'énergie négative perdurent. Plutôt que ψ^+ , on préfère souvent utiliser $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$.

2.3 Solutions de l'équation de Dirac

Une fois encore, on recherche des solutions en onde plane, de la forme :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ik_\mu x^\mu}. \quad (4.29)$$

En utilisant l'équation de Dirac, on obtient un système de deux équations couplées pour φ et χ :

$$\begin{pmatrix} (k_0 - m)\mathbb{1}_2 & k_i \sigma^i \\ k_i \sigma^i & (k_0 + m)\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (4.30)$$

Ce système n'a de solutions que si le déterminant $(k_0^2 - m^2)\mathbb{1}_2 - (k_i \sigma^i)^2$ est nul. Le produit $(k_i \sigma^i)^2$ vaut :

$$(k_i \sigma^i)^2 = \sum_{i,j} k_i k_j \sigma^i \sigma^j = \sum_{i,j} k_i k_j (\delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k) = \sum_{i,j} k_i k_i = |\vec{k}|^2. \quad (4.31)$$

Le système se ramène naturellement à la relation relativiste $k_\mu k^\mu = m^2$, soit $k^0 = \pm E_k = \pm \sqrt{m^2 + |\vec{k}|^2}$. Ceci est attendu puisque cette relation a été imposée dans la construction de l'équation de Dirac. Les solutions d'énergie négative sont toujours présentes. On obtient également une relation entre les deux composantes φ et χ :

$$\chi = \frac{k_i \sigma^i}{m + k^0} \varphi. \quad (4.32)$$

Comme dans le cas du champ scalaire, on peut donner les solutions sous forme covariante :

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\vec{k}) &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{k_i \sigma^i}{m + E_k} \varphi \end{pmatrix} e^{-ik_\mu x^\mu} = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} u(k) e^{-ik_\mu x^\mu} \\ \psi^{(-)}(-\vec{k}) &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{-k_i \sigma^i}{m - E_k} \varphi \end{pmatrix} e^{ik_\mu x^\mu} = \begin{pmatrix} k_i \sigma^i \\ \chi \end{pmatrix} e^{ik_\mu x^\mu} = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} v(k) e^{ik_\mu x^\mu} \end{aligned} \quad (4.33)$$

où la normalisation découle de la condition d'unitarité $\psi^+(k)\psi(k') = \delta(k - k')$. On introduit dans cette expression des spineurs u et v qui portent la structure spinorelle de la fonction d'onde et forment une base des spineurs :

$$u(k) = \sqrt{m + E_k} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{k_i \sigma^i}{m + E_k} \varphi \end{pmatrix}, \quad v(k) = \sqrt{m + E_k} \begin{pmatrix} k_i \sigma^i \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Les spineurs à deux composantes φ et χ ne sont pas encore spécifiés et seront discutés au paragraphe 2.4. Par construction, ils vérifient $\varphi^+ \varphi = \chi^+ \chi = 1$. La condition d'unitarité de la fonction d'onde se traduit par :

$$u^+(k)u(k) = v^+(k)v(k) = 2E_k \quad (4.35)$$

La norme d'un spinor n'est pas un invariant de Lorentz. En revanche, si on calcule $\bar{u}(k)u(k)$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(k)u(k) &= u^+(k)\gamma^0 u(k) = (m + E_k) \left(1 - \frac{\vec{k}^2}{(m + E_k)^2} \right) \phi^+ \phi \\ &= \frac{m^2 + 2mE_k + (E_k^2 - \vec{k}^2)}{m + E_k} \\ &= 2m \end{aligned} \quad (4.36)$$

De même $= \bar{v}(k)v(k) = -2m$. Les produits $\bar{u}u$ et $\bar{v}v$ sont invariants de Lorentz. De manière générale on montre que pour tout spinor ψ , la grandeur $\bar{\psi}\psi$ est un invariant de Lorentz.

2.4 Spin et hélicité

Sur les quatre degrés de liberté existant *a priori* pour un spinor, deux n'ont pas encore été identifiés. Considérons l'opérateur suivant :

$$\Lambda = \frac{1}{2} \hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\sigma^i \partial_i & 0 \\ 0 & -i\sigma^i \partial_i \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

L'opérateur vectoriel du spin pour quatre dimensions $\frac{1}{2} \hat{\vec{\Sigma}}$ s'extrapole de celui à deux dimensions donné par les matrices de Pauli $\frac{1}{2} \hat{\vec{\sigma}}$. L'équation de Dirac a la même forme que l'équation de Schrödinger : $i\partial_0 \psi = H_f \psi$ avec pour hamiltonien $H_f = -i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + \gamma^0 m$. On vérifie sans difficulté que ce hamiltonien commute avec Λ et $\hat{\vec{p}}$. De même Λ commute avec $\hat{\vec{p}}$, soit :

$$[\Lambda, H_f] = [H_f, \hat{\vec{p}}] = [\Lambda, \hat{\vec{p}}] = 0. \quad (4.38)$$

Ces trois opérateurs sont diagonalisables simultanément, Λ et l'impulsion sont deux observables mesurables simultanément. On définit alors l'hélicité comme la projection du spin selon la direction de l'impulsion, soit :

$$\Lambda_s = \frac{\Lambda}{|\vec{k}|}. \quad (4.39)$$

Sans perte de généralité, on peut se limiter à l'étude d'une solution de l'équation de Dirac d'impulsion $\vec{k} = (0, 0, k_z)$. Dans ce cas l'hélicité devient :

$$\Lambda_s = \frac{1}{2|\vec{k}|} \hat{\vec{\Sigma}} \cdot \hat{\vec{p}} = \frac{1}{2k_3} k_3 \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Il y a deux valeurs propres dégénérées : $\lambda_s = +\frac{1}{2}$ avec pour vecteurs propres de l'opérateur d'hélicité $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$, et $\lambda_s = -\frac{1}{2}$ avec pour vecteurs propres $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$.

Finalement, on obtient quatre solutions en onde plane pour l'équation de Dirac correspondant aux énergies positives et négatives dans les projections de spin $\pm \frac{1}{2}$. De nouveau, la solution d'énergie négative d'implusion $-\vec{k}$ s'interprète comme l'antiparticule d'impulsion \vec{k} :

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k},s}^{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{2E_k}} u(\vec{k}, s) e^{-ik_z z} = \sqrt{\frac{m + E_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \frac{\sigma_3 k_z}{m + E_k} \varphi_s \end{pmatrix} e^{-ik_z z} \\ \psi_{\vec{k},s}^{(-)} &= \frac{1}{\sqrt{2E_k}} v(\vec{k}, s) e^{ik_z z} = \sqrt{\frac{m + E_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_3 k_z}{m + E_k} \varphi_s \\ \varphi_s \end{pmatrix} e^{ik_z z} \end{aligned} \quad (4.41)$$

où $s = 1, 2$ dénote les états d'hélicité et :

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Le champ spinoriel complexe décrit donc des particules chargées (et leurs antiparticules) de spin $\frac{1}{2}$. $\psi_{\vec{k},s}^{(+)}$ et $\psi_{\vec{k},s}^{(-)}$ forment une base de l'espace des fonctions d'onde spinorielles. Elles vérifient également une relation de fermeture. On montre que cette dernière se traduit sur les spineurs de base par :

$$\sum_{s=1,2} u(k, s) \bar{u}(k, s) = k_\mu \gamma^\mu + m, \quad \sum_{s=1,2} v(k, s) \bar{v}(k, s) = k_\mu \gamma^\mu - m. \quad (4.43)$$

La solution générale du champ est alors une combinaison linéaire de ces quatres solutions, en sommant sur toutes les impulsions :

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_{s=1,2} \left(b_{k,s} u(k, s) e^{-ikx} + d_{k,s}^* v(k, s) e^{ikx} \right), \quad (4.44)$$

avec des coefficients complexes $b_{k,s}$ et $d_{k,s}^*$.

2.5 Lagrangien de Dirac

Le lagrangien est une grandeur scalaire, invariante, de Lorentz. Un tel scalaire peut être obtenu par le produit scalaire de deux quadrivecteurs mais pas par le produit de deux spineurs $\psi^+ \psi$. En revanche on a rencontré une construction quadrivectorielle construite à partir de deux spineurs dans la définition du quadri-courant : $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$. En contractant sur un opérateur quadrivectoriel, on peut construire un scalaire à partir de deux spineurs : $\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$. Il existe une deuxième construction qui permet de construire un scalaire à partir de deux spineurs : $\bar{\psi} \psi$. À partir de ces deux scalaires de Lorentz, le lagrangien le plus simple pour un champ libre (ne faisant apparaître que des termes $\propto \psi^2$) est le lagrangien de Dirac :

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x). \quad (4.45)$$

Ce lagrangien donne comme équation du mouvement pour ψ l'équation de Dirac :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0. \quad (4.46)$$

qui s'obtient en traitant ψ et $\bar{\psi}$ comme deux champs indépendants. Pour simplifier les formules, on note parfois \not{a} la matrice 4×4 : $a_\mu \gamma^\mu = \gamma^\mu a_\mu = \sum_\mu a_\mu \gamma^\mu$, où a est un quadrivecteur. En particulier, l'opérateur \not{a} est l'opérateur $\gamma^\mu \partial_\mu$. Ainsi, le lagrangien de Dirac s'écrit $\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\not{a} - m)\psi$.

3 Champ vectoriel

3.1 Lagrangien et équation du champ vectoriel

Un champ quadrivectoriel A_μ possède quatre composantes et une contrainte de norme : il y a donc trois degrés de liberté correspondant à une particule de spin 1. Sur le modèle du spin 0, le lagrangien ne peut faire apparaître que les structures : $A_\mu A^\mu$ (terme de masse) et $\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu$ avec différentes permutations des indices de Lorentz (termes cinétiques). On montre que le lagrangien du champ vectoriel réel libre est :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu, \quad (4.47)$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur antisymétrique :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \text{ et } F^{\mu\nu} = \begin{cases} F^{0\nu} = -F_{0\nu}, \\ F^{\mu 0} = -F_{\mu 0}, \\ F^{ij} = F_{ij}. \end{cases} \quad (4.48)$$

L'équation d'Euler-Lagrange donne alors pour l'équation du mouvement l'**équation de Proca** :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (4.49)$$

3.2 Interprétation physique du champ vectoriel de masse nulle

Considérons le cas où $m = 0$. Le tenseur $F_{\mu\nu}$ est composé de six termes non nuls car $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$). En regroupant les termes avec un indice temporel, il vient :

$$\begin{pmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \\ \partial_0 A_2 - \partial_2 A_0 \\ \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_0 A^1 - \partial_1 A^0 \\ -\partial_0 A^2 - \partial_2 A^0 \\ -\partial_0 A^3 - \partial_3 A^0 \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{pmatrix} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A^0. \quad (4.51)$$

De même, les trois éléments restants deviennent :

$$\begin{pmatrix} F_{32} \\ F_{13} \\ F_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 \\ \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 \\ \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 \\ \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} F_{32} \\ F_{13} \\ F_{21} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (4.53)$$

En électromagnétisme, on montre que les potentiels scalaire φ et vecteur \vec{A} forment un quadrivecteur $A = (\varphi, \vec{A})$. En utilisant ce champ vectoriel dans les relations (4.51) et (4.53), on reconnaît la définition des champs électrique $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi$ et magnétique $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. Le tenseur $F_{\mu\nu}$ est alors le tenseur électromagnétique :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

et

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit alors en fonction des champs \vec{E} et \vec{B} :

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 E_x + \partial_2 E_y + \partial_3 E_z = 0 \\ \partial_0 E_x - \partial_2 B_z + \partial_3 B_y = 0 \\ \partial_0 E_y + \partial_1 B_z - \partial_3 B_x = 0 \\ \partial_0 E_z - \partial_1 B_y + \partial_2 B_x = 0 \end{array} \right. \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ -\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \\ -\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \\
 \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

On retrouve les équations de Maxwell sans source ($\vec{j} = 0, \rho = 0$), qui sont bien les équations d'évolution du champ électromagnétique libre. Dans ce formalisme de la théorie (classique) des champs, on peut reconstruire toute la théorie de l'électromagnétisme. Le champ vectoriel associé à l'électromagnétisme (*i.e.* le champ du photon) est donné par le quadri-potentiel A^μ . Il est remarquable que ce potentiel est défini à une dérivée près qui correspond à un choix de jauge arbitraire. La transformation de A_μ en $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$ n'affecte ni les véritables observables que sont les champs électrique et magnétique, ni le lagrangien libre. Le lagrangien de Maxwell ne fait pas apparaître de terme de masse, contrairement aux lagrangiens de Klein-Gordon et de Dirac. Un terme de masse pour le photon aurait la forme $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$, mais un tel terme n'est pas invariant sous le choix de jauge, ce qui pose problème. Cet aspect sera discuté plus en détails dans le chapitre suivant.

Les lagrangiens libres pour les champs du modèle standard sont résumés dans le tableau 4.1.

4

Spin et représentations

Nous venons de voir, en construisant différentes équations relativistes, que chaque spin est associé à une structure mathématique différente. Ceci trouve sa justification rigoureuse dans la théorie des groupes, en particulier du groupe de Lorentz-Poincaré.

La structure d'un champ conditionne la transformation du champ sous une transformation de Lorentz. L'invariance sous les transformations du groupe de Lorentz-Poincaré est associée à deux invariants. Le premier est la masse invariante, norme du quadrivecteur énergie-impulsion et le second est le spin. Masse et spin sont les deux nombres quantiques intrinsèques à toute particule, associés à l'invariance de Lorentz. On peut ainsi montrer que :

- **Le spin 0** correspond à un **champ scalaire**, c'est-à-dire que $\varphi(x)$ est un objet à une seule composante complexe (c'est-à-dire, avant quantification, un nombre). La transformation d'un champ scalaire par une transformation de Lorentz est triviale : $\varphi'(x') = \varphi(x)$.
- **Le spin 1** correspond à un objet à quatre composantes complexes formant un quadrivecteur, qui par définition se transforme comme les coordonnées. On parle alors de **champ vectoriel**.
- **Le spin $\frac{1}{2}$** correspond à un objet à deux composantes complexes appelé **spineur (de Weyl)**. L'ensemble des spineurs se divise en deux familles invariantes sous les transformations du groupe de Lorentz-Poincaré. Ceci signifie que le transformé d'un spinor de la première famille est un spinor de la première famille et de même pour la seconde. Les deux types de spineurs sont symétriques l'un de l'autre sous la transformation de parité (inversion des coordonnées d'espace, $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$). On parle de deux états de chiralité gauche (ψ_L) et droite (ψ_R). On peut faire ici l'analogie avec certaines molécules qui, bien qu'ayant la même structure, ne peuvent se déduire l'une de l'autre par rotation mais uniquement par symétrie planaire et peuvent présenter des propriétés chimiques différentes.

Les interactions électromagnétique et forte se couplent indifféremment avec les champs gauche et droit. On utilisera généralement pour représenter un champ de spin $\frac{1}{2}$ un objet à quatre composantes, le **spineur de Dirac ou champ spinoriel** qui regroupe spinor gauche et droit et satisfait à l'équation de Dirac. Le lien entre les états de chiralité et les spineurs discutés au paragraphe 2.1 fait l'objet de l'exercice 4.4. Bien que possédant le même nombre de composantes qu'un quadrivecteur, un spinor de Lorentz se transforme différemment lors de l'application d'une transformation de Lorentz au système (l'expression de cette transformation ne sera pas discutée ici). L'interaction faible viole la symétrie de parité et n'interagit qu'avec les fermions de chiralité gauche. Pour décrire cette interaction, il faut réséparer les deux composantes.

Ces trois types de champs suffisent pour décrire l'ensemble des particules du modèle standard. Tous les fermions (quarks et leptons) sont des particules de spin $\frac{1}{2}$. On verra dans les chapitres suivants que les interactions de jauge introduisent naturellement des bosons vecteurs (spin 1). Enfin le mécanisme de brisure de symétrie nécessite la présence d'un boson scalaire. Formellement, on peut définir des représentations tensorielles de plus en plus complexes pour les champs de spin plus élevé. Une théorie

Tableau 4.1– Champs et lagrangiens libres pour les particules du modèle standard.

Champ	Spin	Particule(s)	Lagrangien
scalaire $\varphi(x)$	0	boson de Higgs	Lagrangien de Klein-Gordon $\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2)$
spineur $\psi(x)$	$\frac{1}{2}$	quarks et leptons	Lagrangien de Dirac $\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$
vecteur $A^\mu(x)$	1	bosons de jauge γ, Z, W^\pm , gluons	Lagrangien de Maxwell $\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (photon uniquement)

quantique de la gravitation nécessite un boson de spin 2, le graviton, pour obtenir une interaction purement attractive. Des extensions du modèle standard associent à ce graviton un partenaire supersymétrique, le gravitino, de spin $\frac{3}{2}$.

5

Quantification du champ

La quantification du champ est la procédure qui permet de résoudre les problèmes d'énergie et densité négative liés aux équations quantiques relativistes. Elle fait apparaître le concept d'antiparticules associées aux solutions d'énergie négative. Le passage d'un champ classique à un champ quantique est une procédure complexe qui ne sera pas justifiée ici. Elle consiste principalement à remplacer le champ par un opérateur de champ et les crochets de Poisson par des relations de commutation ou d'anticommuation selon le spin du champ.

5.1 Champ scalaire

La solution la plus générale de l'équation de Klein-Gordon classique, développée sur une base d'ondes planes est de la forme :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a_k e^{-ikx} + b_k^* e^{ikx}), \quad (4.57)$$

où les coefficients a_k et b_k^* sont des nombres complexes conjugués. Pour quantifier ce champ la seule partie de cette expression qui peut passer de nombre à opérateur sont ces coefficients. La fonction φ devient donc un opérateur $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left(\underbrace{\hat{a}_k e^{-ikx}}_{(1)} + \underbrace{\hat{b}_k^* e^{ikx}}_{(2)} \right). \quad (4.58)$$

et son complexe conjugué :

$$\hat{\varphi}^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \left(\underbrace{\hat{b}_k e^{-ikx}}_{(3)} + \underbrace{\hat{a}_k^* e^{ikx}}_{(4)} \right). \quad (4.59)$$

Les crochets de Poisson deviennent des commutateurs, suivant les relations de commutation canoniques :

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{x}', t)] = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = 0, \quad (4.60)$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{x}', t)] = i\delta(x - x'). \quad (4.61)$$

À partir de ces relations, on montre que les opérateurs \hat{a}_k et \hat{a}_k^+ doivent satisfaire aux relations de commutation des bosons introduites au chapitre 3 et correspondent donc aux opérateurs de création et d'annihilation :

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'} \quad [b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'}. \quad (4.62)$$

On reconnaît alors dans $\hat{\phi}$ l'opérateur de champ, dont on a montré qu'il avait des propriétés analogues à la fonction d'onde et pouvait s'interpréter comme une densité volumique de particule. Par la suite, on notera simplement le champ quantifié φ et les opérateurs de création et d'annihilation a_k , a_k^+ , b_k et b_k^+ . Les termes (1) à (4) peuvent s'interpréter comme :

- (1) la destruction d'une particule d'impulsion \vec{k} (a_k);
- (2) la création d'une antiparticule d'impulsion \vec{k} (b_k^+);
- (3) la destruction d'une antiparticule d'impulsion \vec{k} (b_k);
- (4) la création d'une particule d'impulsion \vec{k} (a_k^+).

Les opérateurs a_k et b_k commutent puisqu'il n'agissent pas sur les mêmes objets (particule et antiparticule). Dans le cas d'un champ réel, qui décrit un champ qui est sa propre antiparticule, on a $\varphi^+ = \varphi$ et naturellement $a_k = b_k$. La destruction d'une particule ou d'une antiparticule sont équivalentes.

L'opérateur de champ est une généralisation de la fonction d'onde (voir chapitre 3) qui permet de résoudre le problème d'interprétation de la fonction d'onde comme amplitude de probabilité de présence pour un système où le nombre de particules varie. Le concept de champ quantifié permet donc de traiter des systèmes à la fois quantiques et relativistes en unifiant les concepts de fonction d'onde et de champ classique. Les problèmes posés par la mécanique quantique relativiste sont ainsi résolus. L'étude de l'évolution spatio-temporelle des champs quantiques forme la théorie quantique des champs. Il faut noter que l'on est passé d'une représentation d'un système quantique à plusieurs particules, où chaque particule est décrite par une fonction d'onde, à un unique objet, le champ quantique, qui permet la description de toutes les particules et antiparticules d'un même type. Par la suite il y aura donc un unique champ de l'électron, un unique champ du photon, etc.

La quantification du champ vectoriel est similaire à celle du champ scalaire. En effet, on montre que les équations d'évolution du champ vectoriel sont équivalentes à trois équations de Klein-Gordon indépendantes. Les opérateurs création et annihilation vérifient les mêmes relations de commutation.

5.2 Champ spinoriel

La quantification du champ spinoriel s'opère de manière similaire à partir des solutions de l'équation de Dirac. Un champ spinoriel est caractérisé par sa masse et son hélicité. Pour un fermion massif de spin $\frac{1}{2}$ il existe deux états d'hélicité. Après quantification, le champ spinoriel libre, solution de l'équation de Dirac, est :

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_{s=1,2}^{\text{hélicité}} \underbrace{u_{k,s}}_{\text{spineur}} \underbrace{b_{k,s}}_{\text{op.}} e^{-ikx} + \underbrace{v_{k,s}}_{\text{spineur}} \underbrace{d_{k,s}^+}_{\text{op.}} e^{ikx}, \quad (4.63)$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_{s=1,2}^{\text{hélicité}} \underbrace{\bar{u}_{k,s}}_{\text{spineur}} \underbrace{b_{k,s}^+}_{\text{op.}} e^{ikx} + \underbrace{\bar{v}_{k,s}}_{\text{spineur}} \underbrace{d_{k,s}}_{\text{op.}} e^{-ikx}, \quad (4.64)$$

où les termes $u_{k,s}$ et $v_{k,s}$ sont des spineurs de base.

Les termes $b_{k,s}$, $d_{k,s}$, $b_{k,s}^+$ et $d_{k,s}^+$ sont les opérateurs de création et d'annihilation pour une particule (b et b^+) ou une antiparticule (d et d^+) d'impulsion k et d'hélicité s . Pour pouvoir trouver une énergie du système positive, il faut imposer des relations d'anticommutation en lieu et place des crochets de Poisson (voir exercice 4.3) qui résultent dans les relations d'anticommuation propres aux fermions pour les opérateurs b et d :

$$\left[b_i^+, b_j^+ \right]_+ = [b_i, b_j]_+ = \left[d_i^+, d_j^+ \right]_+ = [d_i, d_j]_+ = 0, \quad (4.65)$$

$$\left[b_i, b_j^+ \right]_+ = \left[d_i, d_j^+ \right]_+ = \delta_{ij} \mathbb{1}. \quad (4.66)$$

Comme dans le cas du spin 0, les opérateurs b et d commutent toujours entre eux puisqu'ils agissent sur des particules différentes.

On peut donner ici une idée de la structure de la démonstration du théorème de connexion spin-statistique qui relie le spin entier ou demi-entier à une fonction d'onde symétrique ou antisymétrique. Le spin apparaît comme un nombre quantique associé à l'invariance de Lorentz et impose la nature de la représentation mathématique du champ (champs scalaire, spinoriel, vectoriel, etc). La quantification de chaque champ fait apparaître les opérateurs création et annihilation ainsi que les opérateurs de champ. Le point central de la démonstration montre que la quantification d'un champ de spin entier nécessite des relations de commutation entre opérateurs alors que celle d'un champ de spin demi-entier donne des relations d'anticommuation. Ce choix des relations de commutation permet d'assurer que d'une part l'énergie du système est toujours positive et d'autre part que le nombre de particules moins celui d'antiparticules est une grandeur conservée (voir exercices 4.2 et 4.3). Enfin, on a vu au chapitre 3 que le type de relation de commutation était directement lié à la symétrie ou à l'antisymétrie de la fonction d'onde. En mécanique quantique, le spin est introduit artificiellement pour

expliquer certains résultats expérimentaux, mais c'est la relativité restreinte et l'invariance de Lorentz qui justifient son existence. Le lien entre le spin (propriété d'origine relativiste) et la symétrie de la fonction d'onde (liée à un postulat de la mécanique quantique) ne peut donc s'expliquer que dans le cadre d'un formalisme qui unifie ces deux théories, la théorie quantique des champs.

● L'essentiel

Les points clefs du chapitre

- ❶ En construisant, sur le modèle de l'équation de Schrödinger, une équation quantique à partir de la relation relativiste entre énergie et impulsion, on aboutit à l'équation de Klein-Gordon.
- ❷ Cette équation présente deux problèmes majeurs : elle fait apparaître des solutions d'énergie négative et la densité apparaissant dans l'équation de continuité n'a plus de signe défini, ce qui interdit l'interprétation probabiliste.
- ❸ Ces problèmes peuvent être résolus si l'on interprète les solutions d'énergie négative comme des ondes qui remontent le temps. Une telle onde est alors équivalente à un second type de particule de charge opposée qui avance dans le temps, l'antiparticule.
- ❹ L'une des causes de ces difficultés relève de la nature quadratique de la relation relativiste entre énergie et impulsion. Si on cherche une équation linéaire, on aboutit à l'équation de Dirac. L'interprétation des solutions de cette équation implique toujours des antiparticules qui sont un concept intrinsèque à une théorie quantique relativiste.
- ❺ L'équation de Dirac est une équation matricielle qui s'applique à des objets à quatre dimensions, les spineurs de Dirac. Une étude détaillée de ces objets permet de conclure qu'ils permettent de décrire des particules et des antiparticules de spin 1/2.
- ❻ Les équations du champ quadri-vectoriel sans masse sont les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. On peut identifier le champ vectoriel du photon au quadri-potentiel classique.
- ❼ De manière générale, on peut relier le spin d'une particule qui est un invariant relativiste et la structure mathématique utilisée pour le représenter : scalaire pour le spin 0, spinor pour le spin 1/2, vecteur pour le spin 1.
- ❽ La quantification du champ consiste à substituer des opérateurs aux coefficients de l'expansion de Fourier des champs. Les relations de commutation canoniques héritées de la mécanique quantique et de la théorie des champs conduisent à identifier ces opérateurs aux opérateurs création et annihilation pour les particules et/ou les antiparticules.
- ❾ La quantification des champs de spin entier n'est possible qu'avec des relations de commutation entre opérateurs création et annihilation décrivant ainsi un système de bosons. À l'inverse la quantification des champs de spin 1/2 nécessite des relations d'anticommutation propres à un système de fermions. C'est le théorème de connexion spin statistique qui relie le concept quantique de boson et de fermion à celui relativiste de spin.

Entraînez-vous



4.1 Lagrangiens de Klein-Gordon et de Dirac

Le lagrangien d'un champ scalaire réel $\varphi(x)$ est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2).$$

a) Montrez que $\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \varphi)} = \partial^\nu \varphi$.

b) Retrouvez l'équation de Klein-Gordon à partir de l'équation d'Euler-Lagrange appliquée à ce lagrangien.

Le lagrangien pour le champ spinoriel libre est :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (\partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - m^2 \psi^2).$$

ψ et $\bar{\psi}$ doivent être traités comme deux degrés de liberté du système (particule et antiparticule)

c) Montrez que l'équation d'Euler-Lagrange pour le degré de liberté ψ est l'équation de Dirac.

d) Calculez l'équation du mouvement pour $\bar{\psi}$. Comment est-elle reliée à la précédente ?

4.2 Densité et quantification du champ scalaire

Pour un champ scalaire quantifié, on définit la quantité $\hat{Q} = \int q j^0 d^3x$, où q est la charge et j^0 la densité.

a) Quelle est la signification physique de \hat{Q} ?

b) À partir de la solution quantifiée pour le champ libre φ , déterminez l'expression de \hat{Q} en fonction des opérateurs création et annihilation.

c) En déduire l'expression de \hat{Q} en fonction des opérateurs nombre de particules et nombre d'antiparticules en supposant des relations de commutation pour les opérateurs création et annihilation.

d) Discutez le résultat obtenu. Que se passerait-il avec des relations d'anticommutation ?

4.3 Connection spin-statistique pour le spin 1/2

Un système de particules relativistes de spin $\frac{1}{2}$ est décrit par un champ spinoriel, qui suit l'équation de Dirac. La solution générale de cette équation pour un champ libre quantifié est :

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_{s=1,2} u_{k,s} b_{k,s} e^{-ikx} + v_{k,s} d_{k,s}^+ e^{ikx},$$

avec $k^0 = E_k > 0$ et les conditions de normalisation suivantes :

$$u_{k,s}^+ u_{k,s'} = v_{k,s}^+ v_{k,s'} = 2E_k \delta_{ss'}, \quad u_{k,s}^+ v_{k',s'} = v_{k,s}^+ u_{k',s'} = 0.$$

L'équation de Dirac est analogue à l'équation de Schrödinger : $i\frac{d}{dt}\psi = H_f\psi$. Le hamiltonien total du système est alors donné par :

$$\mathcal{H} = \int \psi^+ H_f \psi d^3x.$$

- a)** Donnez l'expression de $\psi^+ H_f \psi$, puis H .
- b)** Faites apparaître les opérateurs de nombre de particules et de nombre d'antiparticules en supposant des règles d'anticommuation pour les opérateurs création et annihilation.
- c)** Discutez le signe de l'énergie pour un nombre quelconque de particules et d'antiparticules dans le système (on rappelle que l'on peut toujours redéfinir l'énergie à une constante globale près, fût-elle infinie).
- d)** Reprenez les questions (b) et (c) pour des règles de commutation. Conclure sur le fait qu'une particule de spin 1/2 est nécessairement un fermion.

4.4 Représentation de Weyl

Considérons une autre représentation des matrices de Dirac, dite représentation de Weyl :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

- a)** Vérifiez que ces nouvelles matrices satisfont les relations d'anticommuation des matrices de Dirac.

- b)** Pour une solution en onde plane de l'équation de Dirac

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_w(x) \\ \chi_w(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ik^\mu x_\mu},$$

montrez que :

$$\varphi = \frac{k^0 + k^i \sigma_i}{m} \chi, \text{ et } \chi = \frac{k^0 - k^i \sigma_i}{m} \varphi.$$

Les deux composantes à deux dimensions $\varphi_w(x)$ et $\chi_w(x)$ s'appellent des spineurs de Weyl. La transformation de parité P est l'inversion des coordonnées spatiales $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$.

- c)** Montrez que les deux spineurs de Weyl se déduisent l'un de l'autre par symétrie de parité : $\tilde{\chi}_w = P\chi_w = \varphi_w$ et $\tilde{\varphi}_w = P\varphi_w = \chi_w$.

Introduction

Nous allons maintenant décrire la construction des lagrangiens d'interaction en physique des particules. Le théorème de Noether associe grandeur conservée et symétrie du système. Historiquement, les théories physiques étaient construites en imposant la conservation de grandeurs pertinentes, la symétrie apparaissant comme conséquence. En théorie quantique des champs, l'approche choisie est inverse : à partir du lagrangien libre, on va imposer des symétries supplémentaires qui auront pour conséquence de faire apparaître interactions et grandeurs conservées.

Objectifs

- Connaître** la structure du lagrangien de l'électrodynamique quantique et du modèle standard.
- Définir** l'invariance de jauge locale et le mécanisme de Higgs.
- Expliquer** la méthode permettant d'intégrer les interactions entre fermions en imposant des symétries supplémentaires.
- Expliquer** la nécessité de la brisure spontanée de symétrie pour concilier particules massives et interactions de jauge.

Plan

- 1 Interaction de jauge
- 2 Brisure spontanée de symétrie
- 3 Le lagrangien du modèle standard

1

Interaction de jauge

1.1 Lagrangien d'interaction

Le lagrangien libre ne contient que des termes couplant un champ à lui-même : $\varphi^+ \varphi$, $\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi$, $\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi$, $\bar{\psi} \psi$, $\partial_\mu A^\nu \partial_\nu A^\mu$... En introduisant les solutions des équations libres pour les champs, on fait apparaître des produits d'opérateurs création et annihilation de la forme $c_k^+ c_k$. Nous avons déjà rencontré ce type de terme dans le hamiltonien libre au paragraphe 4.2. L'interaction entre plusieurs champs va se traduire par l'annihilation d'une ou plusieurs particules d'impulsion et de spin donnés et la création de nouvelles

particules d'impulsion et de spin différents. Ceci va se traduire par des produits de plusieurs opérateurs de création et d'annihilation, et donc, par le produit de plusieurs champs ou de leurs dérivées.

Pour décrire l'interaction électromagnétique d'un fermion chargé (par exemple l'électron), il faut construire un lagrangien d'interaction, scalaire de Lorentz, qui couple un champ spinoriel ψ (l'électron) et un champ vectoriel A_μ (le photon ou champ électromagnétique). Le produit $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ forme un quadrivecteur (résultat admis précédemment). Le produit scalaire $\lambda\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ est donc un scalaire de Lorentz. C'est le lagrangien d'interaction le plus simple que l'on puisse construire. Nous allons discuter au paragraphe suivant comment un tel terme peut apparaître naturellement en imposant une symétrie particulière au lagrangien.

En général, les termes du lagrangien sont constitués d'un produit de champs et de leurs dérivées, Π , et d'une constante numérique de couplage g : $\mathcal{L} = g\Pi$. Les champs sont des objets dimensionnés (voir exercice 5.1). Des arguments théoriques liés à la renormalisation, qui dépassent de très loin le cadre de cet ouvrage, interdisent que la constante de couplage ait pour dimension une puissance négative de l'énergie. En conséquence, la dimension totale du produit de champs ne dépasse pas la dimension de la densité lagrangienne. Cette condition limite les termes trop complexes. En effet, seuls les termes de couplage entre deux fermions et un boson et les couplages entre trois ou quatre bosons satisfont ce critère.

1.2 Invariance de jauge

Considérons un champ fermionique (spineur de Lorentz), par exemple le champ de l'électron. Le champ libre est décrit par le lagrangien de Dirac :

$$\mathcal{L}_{\text{libre}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (5.1)$$

En mécanique quantique, la fonction d'onde est toujours définie à une phase près. On voudrait de la même manière que le champ quantifié obéisse à la même règle, c'est-à-dire que la transformation $\psi(x) \longrightarrow \psi' = e^{+i\theta}\psi(x)$ ne modifie pas le lagrangien. Le champ $\bar{\psi}$ se transforme en $\bar{\psi}' = \psi' + \gamma^0 = \psi + \gamma^0 e^{-i\theta} = \bar{\psi} e^{-i\theta}$ et on vérifie sans problème que :

$$\mathcal{L}'_{\text{libre}} = \bar{\psi} e^{-i\theta}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\theta}\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = \mathcal{L}_{\text{libre}}. \quad (5.2)$$

Le lagrangien est invariant sous un changement de phase globale.

Le même changement de phase sera une **transformation locale** si la phase n'est plus constante mais dépend des coordonnées, soit $\theta = \theta(x)$. Dans ce cas, l'exponentielle ne commute plus avec l'opérateur de dérivation :

$$\partial_\mu\psi' = \partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi) = i(\partial_\mu\theta)e^{i\theta(x)}\psi + e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi = e^{i\theta(x)}(\partial_\mu + i\partial_\mu\theta)\psi, \quad (5.3)$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_{libre} &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' \\
 &= \bar{\psi}e^{-i\theta(x)}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{i\theta(x)}\psi \\
 &= e^{-i\theta(x)}\bar{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta(x)}\psi) - m\bar{\psi}\psi \\
 &= e^{-i\theta(x)}\bar{\psi}i\gamma^\mu e^{i\theta(x)}(\partial_\mu + i\partial_\mu \theta)\psi - m\bar{\psi}\psi \\
 &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\mu \partial_\mu \theta)\psi - m\bar{\psi}\psi \\
 \mathcal{L}'_{libre} &= \mathcal{L}_{libre} - \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu \theta)\psi. \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Le lagrangien libre n'est plus invariant sous une transformation locale du champ. Pour rétablir l'invariance, on va ajouter un nouveau champ dans la théorie. Ce champ va venir compenser le terme supplémentaire $-\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu \theta)\psi$ dans la transformation du lagrangien. Ceci s'opère en modifiant l'opérateur de dérivation ∂_μ pour définir une dérivée covariante D_μ telle que $(D_\mu \psi)' = D'_\mu(e^{i\theta}\psi) = e^{i\theta}D_\mu \psi$. On pose :

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu, \tag{5.5}$$

où A_μ est un champ vectoriel et g une constante. La condition de commutation avec une phase locale $e^{i\theta(x)}$ va fixer la loi de transformation du champ vectoriel :

$$(D_\mu \psi)' = (\partial_\mu - igA'_\mu)e^{i\theta}\psi = e^{i\theta}(\partial_\mu + i\partial_\mu \theta - igA'_\mu)\psi. \tag{5.6}$$

En imposant $(D_\mu \psi)' = e^{i\theta}D_\mu \psi$, il vient :

$$e^{i\theta}(\partial_\mu + i\partial_\mu \theta - igA'_\mu)\psi = e^{i\theta}(\partial_\mu - igA_\mu)\psi \implies A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta. \tag{5.7}$$

On reconnaît une transformation de jauge pour un champ vectoriel, c'est-à-dire que la loi de transformation du champ A_μ laisse invariante le lagrangien de Maxwell libre. Ainsi le lagrangien total :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{5.8}$$

est invariant sous les transformations simultanées de ψ et A_μ . Pour maintenir l'invariance du lagrangien lorsqu'on applique un déphasage local au champ fermionique, il faut introduire un champ vectoriel supplémentaire dans la théorie. Le terme supplémentaire présent dans le lagrangien est un terme d'interaction entre le champ vectoriel et le champ fermionique. Ce terme d'interaction a la forme attendue $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$.

1.3 Électrodynamique quantique

On a vu au chapitre 4 qu'un tel champ vectoriel pouvait décrire l'électromagnétisme. Le lagrangien obtenu en imposant l'invariance sous un déphasage local est le lagrangien de l'électrodynamique quantique ou QED. Le champ vectoriel A_μ est le champ de jauge du photon.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
 &= \underbrace{\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi}_{\text{champ } \psi \text{ libre}} + \underbrace{g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\text{couplage entre } \psi \text{ et } A_\mu} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{champ } A_\mu \text{ libre}}. \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

Le terme $g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ traduit l'interaction entre les fermions chargés et le photon, c'est-à-dire l'interaction électromagnétique élémentaire. Pour simplifier la suite on suppose que le champ fermionique est celui de l'électron (et du positron). Le champ $\bar{\psi}$ fait intervenir deux types opérateurs b^+ et d . De même, ψ contient b et d^+ . Enfin, on montre que le champ vectoriel contient aussi des opérateurs de création (a^+) et d'annihilation (a). Comme le photon ne porte pas de charge électrique, il est sa propre antiparticule. En développant le terme d'interaction en fonction des champs, il apparaît des produits d'opérateurs création et annihilation de la forme $(b^+ + d)(a + a^+)(b + d^+)$, soit huit termes qui décrivent les huit vertex élémentaires de l'interaction électromagnétique. Par exemple, le terme b^+ab traduit l'annihilation d'un électron, l'annihilation d'un photon et la création d'un nouvel électron, soit l'absorption d'un photon par un électron. Les huit vertex sont explicités sur la figure 5.1. Ces vertex sont cinématiquement interdits car ils violent la conservation de la quadri-impulsion. On verra néanmoins par la suite qu'ils peuvent être combinés pour décrire des processus physiques.

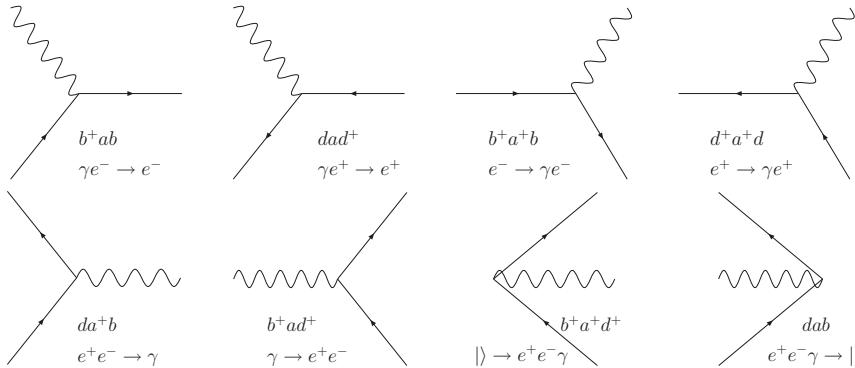


Figure 5.1– Interactions électromagnétiques élémentaires entre électron, positron et photon.

Nous venons de voir comment, à partir du lagrangien d'un fermion libre, nous pouvions construire une théorie décrivant les interactions entre fermions par l'échange d'un boson vecteur de masse nulle. Cette approche consiste à imposer l'invariance sous une symétrie locale, dite symétrie de jauge. Nous avons détaillé le cas le plus simple d'un déphasage local du champ, qui conduit à l'interaction électromagnétique. Des symétries plus complexes peuvent être utilisées ; elles conduisent à l'apparition de plusieurs bosons de jauge et permettent de décrire les interactions faible et forte. Dans tous les cas, le concept global reste le même.

2

Brisure spontanée de symétrie

2.1 Mécanisme de Higgs

On a déjà montré lors de l'étude du champ vectoriel qu'un terme de masse pour le champ vectoriel n'était pas invariant de jauge. Les bosons vecteurs doivent donc être

de masse nulle. Expérimentalement, c'est le cas pour le photon et vraisemblablement pour le gluon de l'interaction forte. En revanche, la courte portée de l'interaction faible ne peut s'expliquer qu'à l'aide de bosons massifs. De fait, on sait aujourd'hui que les bosons de l'interaction faible W^\pm et Z sont parmi les particules élémentaires les plus lourdes connues avec respectivement $m_W = 80,4$ GeV et $m_Z = 91,2$ GeV.

C'est pour résoudre le problème des masses des bosons de jauge que le mécanisme de brisure spontanée de symétrie a été proposé de manière indépendante par plusieurs physiciens en 1963 : Peter Higgs d'une part, François Englert et Robert Brout d'autre part, ainsi que Gerald Guralnik, Carl Richard Hagen et Thomas Kibble. Ce mécanisme était déjà connu en physique de la matière condensée dans la description du ferromagnétisme ou celle de la supraconductivité (théorie de Landau-Ginzburg). De plus, nous discuterons dans le cadre de l'interaction faible que les termes de masses des fermions doivent également être nuls pour que le lagrangien soit invariant de jauge. Le mécanisme de Higgs¹ propose également une solution élégante au problème des masses des fermions. Nous allons voir comment ce mécanisme peut s'appliquer pour donner une masse au photon. Reprenons le lagrangien de l'électrodynamique auquel nous retirons le terme de masse du champ fermionique :

$$\mathcal{L}_{QED} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

Ajoutons à la théorie un nouveau champ scalaire complexe $\varphi(x)$, couplé au photon. Ce champ est décrit par le lagrangien de Klein-Gordon. On vérifie que ce lagrangien est invariant de jauge. Par analogie avec la mécanique classique, où $\mathcal{L} = E_c - V$, le terme de masse $m^2\varphi^+\varphi$ dans le lagrangien peut s'interpréter comme un potentiel intrinsèque du champ. L'extension la plus simple de ce potentiel consiste à rajouter un terme $\lambda(\varphi^+\varphi)^2$. En fait, tout terme de la forme $\varphi^2 = \varphi^+\varphi$ est invariant de Lorentz et invariant de jauge ($\varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\theta}\varphi$). Un potentiel qui ne dépend que du module carré du champ vérifiera aussi ces deux invariances. Le lagrangien pour ce nouveau champ scalaire est donc :

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2} (D_\mu\varphi^+ D^\mu\varphi - m^2\varphi^+\varphi - \lambda(\varphi^+\varphi)^2). \quad (5.11)$$

Le potentiel, qui est représenté sur la figure 5.2, s'écrit alors :

$$V(|\varphi|) = m^2|\varphi|^2 + \lambda|\varphi|^4. \quad (5.12)$$

Le vide est défini comme l'état fondamental du champ, c'est-à-dire celui où le potentiel est minimal. Pour tous les champs libres, ceci correspond à un champ nul. Pour ce champ scalaire, les extrema du potentiel sont donnés par :

$$\frac{\partial V(|\varphi|)}{\partial|\varphi|} = 2m^2|\varphi| + 4\lambda|\varphi|^3 = 0, \quad (5.13)$$

1. L'histoire à principalement retenu le nom de Peter Higgs pour ce mécanisme. Aujourd'hui on parle de plus en plus de mécanisme et de boson de Brout-Englert-Higgs, Brout et Englert ayant soumis leur article quelques semaines avant Peter Higgs. Dans cet ouvrage le choix a été fait de garder l'appellation historique de boson de Higgs même si elle n'est pas la plus correcte.

soit :

$$\varphi = 0 \text{ ou } |\varphi|^2 = \frac{-m^2}{2\lambda}. \quad (5.14)$$

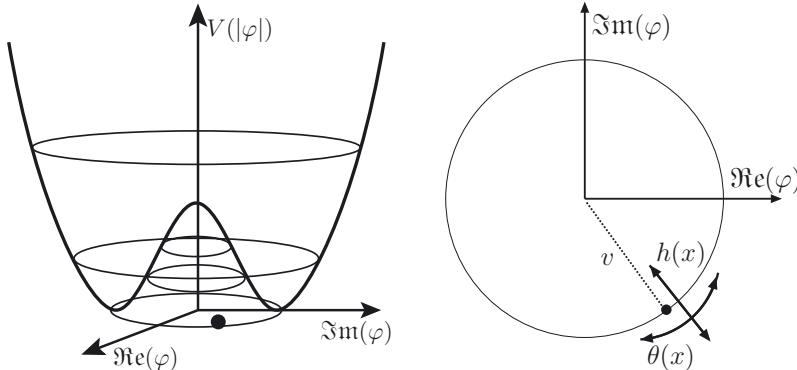


Figure 5.2 – Potentiel du champ de Higgs (à gauche) et fluctuation du champ autour du minimum (à droite) avec un degré de liberté radial (boson de Higgs) et un degré de liberté transverse (boson de Goldstone).

Dans le cas où $m^2 < 0$ et $\lambda > 0$, le potentiel a une forme de chapeau mexicain dans le plan $(\Re(\varphi), \Im(\varphi))$: $\varphi = 0$ est un maximum local et il existe une infinité de minima sur le cercle de rayon $v = \sqrt{\frac{-m^2}{2\lambda}}$. Pour un tel champ, la valeur dans le vide (en l'absence de particules) du champ est non nulle et la nature a dû choisir une valeur de vide parmi toutes les valeurs possibles. Le potentiel, qui intervient dans le lagrangien, est invariant de jauge puisqu'il ne dépend que du module du champ, mais la valeur dans le vide du champ ne l'est pas. La valeur dans le vide du champ brise spontanément la symétrie ($U(1)$ dans le cas présent). Le champ scalaire complexe peut alors se réécrire sous la forme $(v + h(x)) e^{i\theta(x)}$ où $h(x)$ et $\theta(x)$ sont deux champs scalaires réels de valeur nulle dans le vide. Le champ h caractérise la variation radiale du champ dans le potentiel, c'est le boson de Higgs. Il est massif, la masse étant donnée par la courbure du potentiel autour de v . Le champ θ , appelé boson de Goldstone, caractérise le degré de liberté transverse du champ complexe. Le potentiel dans cette direction est toujours plat et la masse du boson de Goldstone est nulle.

L'invariance de jauge $U(1)$ permet de faire disparaître le degré de liberté associé au boson de Goldstone. En effet, la transformation $\varphi \rightarrow \varphi' = e^{-i\theta(x)}\varphi = v + h(x)$ est une transformation de jauge qui laisse invariant le lagrangien. Ce degré de liberté va revenir sous la forme d'une masse pour le boson de jauge. Le lagrangien du champ scalaire se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} &= \frac{1}{2} [D_\mu \varphi'^+ D^\mu \varphi' - m^2 \varphi'^+ \varphi' - \lambda (\varphi'^+ \varphi')^2] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_\mu h^+ \partial_\mu h + g^2 (v + h)^2 A_\mu A^\mu - m^2 (v + h)^2 - \lambda (v + h)^4], \end{aligned} \quad (5.15)$$

soit finalement :

$$\mathcal{L}_{Higgs} = \frac{1}{2} [\partial_\mu h^+ \partial_\mu h - g^2 v^2 A_\mu A^\mu - g^2 v h A_\mu A^\mu - g^2 h^2 A_\mu A^\mu + 2m^2 h^2 - 2\lambda v h^3 - \lambda h^4 - m^2 v^2]. \quad (5.16)$$

Les différents termes de ce lagrangien sont :

- $\partial_\mu h^+ \partial_\mu h$, l'énergie cinétique du boson de Higgs.
- $-g^2 v^2 A_\mu A^\mu$, le couplage du boson vecteur à la valeur dans le vide du champ de Higgs. Le facteur $g^2 v^2$ est une constante, ce terme est donc analogue au terme de masse d'un boson vecteur et s'interprète comme tel. La masse du boson est $M_A = 2gv$.
- $-g^2 v h A_\mu A^\mu$, le couplage entre le boson de Higgs et deux bosons vecteurs (vertex à trois particules).
- $-g^2 h^2 A_\mu A^\mu$, le couplage entre deux bosons de Higgs et deux bosons vecteurs (vertex à quatre particules).
- $2m^2 h^2$, le terme de masse du boson de Higgs. Le facteur m^2 est négatif donc en posant $m_h^2 = -2m^2$, m_h est positif et ce terme s'écrit $-m_h^2 h^2$, ce qui correspond au terme de masse d'un champ scalaire. La masse du boson de Higgs est m_h , qui est bien un réel positif (alors que le champ φ a une masse complexe).
- $-2\lambda v h^3$, l'autocouplage entre trois bosons de Higgs.
- $-\lambda h^4$, l'autocouplage entre quatre bosons de Higgs.
- $-m^2 v^2$, une constante qui disparaît dans les équations d'Euler-Lagrange et n'a pas d'effets physique.

Ce lagrangien fait donc apparaître naturellement un terme de masse pour le boson de jauge par couplage avec la valeur dans le vide du champ. On peut faire une analogie avec la masse effective des électrons dans un cristal semi-conducteur où l'interaction d'un électron avec le champ moyen dans le cristal ajoute un terme analogue à une masse dans la propagation de l'électron.

Le lagrangien est invariant de jauge pour le champ φ mais son interprétation en terme de particule nécessite de fixer la jauge et donc de briser la symétrie.

2.2 Masses des fermions

En introduisant ce nouveau champ dans le modèle, il faut également envisager son couplage aux fermions. Par principe, tout couplage entre champs qui n'est pas interdit par les règles d'invariance doit être pris en compte. Le lagrangien invariant de Lorentz décrivant un couplage fermion-scalaire est le lagrangien de Yukawa, qui s'écrit :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\lambda_f \bar{\psi} \varphi \psi = -\lambda_f \bar{\psi} (v + h) \psi = -\lambda_f v \bar{\psi} \psi - \lambda_f \bar{\psi} h \psi. \quad (5.17)$$

Le lagrangien de Yukawa contient un terme de couplage $-\lambda_f v \bar{\psi} \psi$ entre le champ fermionique et la valeur dans le vide du champ scalaire qui est analogue à un terme de masse pour le fermion. La masse est alors $m_f = \lambda_f v$. La constante λ_f est une nouvelle

constante de couplage propre au fermion. Ainsi, si la masse des bosons de jauge est liée à la constante de couplage de l’interaction, la masse des fermions est due à un nouveau couplage, arbitraire, différent pour chaque fermion. Les masses des fermions sont des paramètres libres du modèle standard, au même titre que les couplages des interactions de jauge et les paramètres m et λ du champ de Higgs.

Le lagrangien total du modèle que nous venons de construire, décrivant un champ fermionique massif en interaction avec un vecteur massif, est finalement :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} \\
 &= \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\partial_\mu h^+ \partial_\mu h - \frac{M_A^2}{2} A_\mu A^\mu - \frac{M_A^2}{2v} h A_\mu A^\mu - \frac{M_A^2}{2v^2} h h A_\mu A^\mu \right. \\
 &\quad \left. - m_h^2 h^2 - 2\lambda v h^3 - \lambda h^4 - m^2 v^2 \right] \\
 &\quad - m_f \bar{\psi} \psi - \lambda_f \bar{\psi} h \psi.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Pour obtenir des bosons massifs, il faut introduire un champ scalaire supplémentaire possédant un potentiel quartique particulier. Sous ces conditions, l’existence d’une infinité de minima du potentiel force la nature à choisir un minimum particulier, brisant la symétrie. Le champ possède alors une valeur non nulle dans le vide conduisant à deux conséquences phénoménologiques : d’une part les bosons et les fermions acquièrent une masse, d’autre part une nouvelle particule scalaire, le boson de Higgs, fait son apparition.

3 Le lagrangien du modèle standard

Le concept d’invariance de jauge décrit précédemment est la base de la construction du lagrangien du modèle standard de la physique des particules. Sans entrer dans les détails, nous allons décrire brièvement comment il est utilisé pour décrire les interactions forte et faible.

3.1 Fermions

Il existe douze fermions élémentaires : les six quarks d , u , s , c , b et t , les trois leptons chargés e^- , μ^- et τ^- et les trois neutrinos qui leur sont associés ν_e , ν_μ et ν_τ . Tous ces fermions possèdent un spin $\frac{1}{2}$. Chacun est donc représenté par un spinor de Lorentz et le lagrangien des champs libres est une somme de lagrangiens de Dirac, indépendants les uns des autres :

$$\mathcal{L}_{libre} = \bar{\psi}_e i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_e + \bar{\psi}_{\nu_e} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_u i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_u + \bar{\psi}_d i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_d + \dots \tag{5.19}$$

Les termes de masse ont été retirés et seront réintroduits par des couplages de Yukawa au champ de Higgs.

3.2 Interactions de jauge non abéliennes

La construction formelle du lagrangien du modèle standard nécessite d'introduire la théorie des groupes de Lie, ce que nous n'aborderons pas ici. Le principe de base est identique à celui développé au paragraphe 1, en utilisant des symétries plus complexes. À partir du lagrangien de Dirac des fermions libres on impose des symétries locales au lagrangien.

L'ensemble des nombres $e^{i\theta}$ avec θ réel forme un groupe de Lie, le groupe $U(1)$. Dans le cas de QED, on parle d'invariance de jauge sous les transformations locales du groupe $U(1)$ ou de symétrie $U(1)$ locale. La constante g représente l'intensité du couplage entre le champ fermionique et le champ du boson vecteur. La dérivée covariante devrait en fait s'écrire :

$$D_\mu = \partial_\mu - igQ A_\mu, \quad (5.20)$$

où g est la constante de couplage et Q l'opérateur de charge. Dans le cas de l'électromagnétisme, c'est un opérateur diagonal dont les valeurs propres sont la charge électrique du champ. L'opérateur de charge est le générateur du groupe $U(1)$. La constante de couplage est une grandeur sans dimension. On utilise également la grandeur :

$$\alpha = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (5.21)$$

Pour l'électromagnétisme, α est la constante de structure fine qui vaut 1/137. De manière générale, le groupe de Lie $SU(n)$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ complexes de déterminant 1, dont un élément quelconque peut s'écrire :

$$e^{iQ_a \theta^a}, \quad (5.22)$$

où les générateurs du groupe, Q_a , sont des matrices caractéristiques de la structure du groupe. Ces générateurs sont au nombre de 3 pour $SU(2)$ et 8 pour $SU(3)$. En imposant une symétrie $SU(2)$ au lagrangien, on parvient à décrire l'interaction faible (en réalité la théorie appropriée est basée sur un groupe $SU(2) \times U(1)$ qui décrit à la fois l'électromagnétisme et l'interaction faible : on parle alors de théorie électrofaible). La symétrie $SU(3)$ décrit la chromodynamique quantique ou QCD, c'est-à-dire l'interaction forte entre les quarks. Pour des groupes de Lie plus complexes, la dérivée covariante devient :

$$D_\mu = \partial_\mu - ig(Q_a W_\mu^a), \quad (5.23)$$

où les W^a sont des champs vectoriels. Le nombre de bosons de jauge associés à une symétrie est égal au nombre de générateurs du groupe.

Ce sont les 8 gluons de l'interaction forte et les bosons W^\pm et Z de l'interaction faible.

Les éléments des groupes $SU(2)$ et $SU(3)$ sont des exponentielles de matrices qui ne commutent pas entre elles. On parle de groupes non abéliens. Pour vérifier l'invariance de jauge, il est nécessaire d'introduire des termes supplémentaires qui couplent trois ($W^\mu W_\nu \partial^\nu W_\mu \dots$) ou quatre ($W_\mu W^\nu W_\mu W^\nu \dots$) bosons de jauge entre eux.

3.3 Interaction faible et violation de parité

L'interaction faible présente des caractéristiques uniques par rapport aux autres interactions. C'est la seule interaction capable de changer la saveur des particules (transformation d'un lepton chargé en neutrino ou d'un quark de type up en quark de type down). Les vecteurs de l'interaction sont des bosons massifs, ce qui suggère que la symétrie de jauge est brisée. Enfin une dernière caractéristique, qui n'a pas été évoquée jusqu'à présent est la violation de parité.

La parité est une symétrie discrète, qui consiste en l'inversion des coordonnées d'espace : $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$. Il s'agit d'une symétrie « miroir ». Appliquée deux fois, la parité restaure le système dans son état initial. Les observables physiques vectorielles (à trois composantes) peuvent avoir deux comportements sous cette symétrie, on définit ainsi :

- un **vecteur** change de signe : par exemple les coordonnées spatiales \vec{x} , la vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, l'impulsion $\vec{p} = m\vec{v}$, le champ électrique $\vec{E} = \frac{q\vec{x}}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|^3} \dots$
- un **pseudovecteur** ne change pas de signe ; tout objet résultant du produit vectoriel de deux vecteurs sera un pseudovecteur, comme par exemple : le moment cinétique $\vec{J} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, le champ magnétique $\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{x} \wedge \vec{v}}{4\pi|\vec{x}|^3} \dots$

Cette transformation n'a pas d'effet au niveau macroscopique, suggérant que l'interaction électromagnétique est invariante sous la transformation de parité. Ceci signifie que l'inversion du système ne modifie pas ses propriétés physiques. Il en est de même pour l'interaction forte. À l'inverse, l'interaction faible va se manifester différemment pour un système et son transformé sous parité. Ce phénomène a été théorisé en 1956 par Chen-Ning Yang et Tsung-Dao Lee et vérifié expérimentalement dans les désintégrations β^- du cobalt 60 par Chien-Shiung Wu en 1957. Dans cette expérience, une source radioactive de cobalt 60 est polarisée par un fort champ magnétique. Les noyaux de cobalt sont alors majoritairement dans un état de spin maximal $S_3 = 5$, aligné selon la direction du champ magnétique. La désintégration β^- transforme un neutron en proton, transformant le noyau de cobalt 60 en nickel 60, de spin $S = 4$. Un électron et un antineutrino sont également produits dans la désintégration. La conservation de la projection du spin impose que le noyau soit dans un état $S_3 = 4$ et l'électron et l'antineutrino à $S_3 = \frac{1}{2}$. On compte alors le nombre d'électrons qui sont émis vers le bas et vers le haut, c'est-à-dire avec le spin et l'impulsion alignés ou opposés (on parle respectivement d'hélicités gauche et droite). La symétrie de parité transforme l'une des ces configurations en l'autre, comme l'illustre la figure 5.3. Si l'interaction faible est

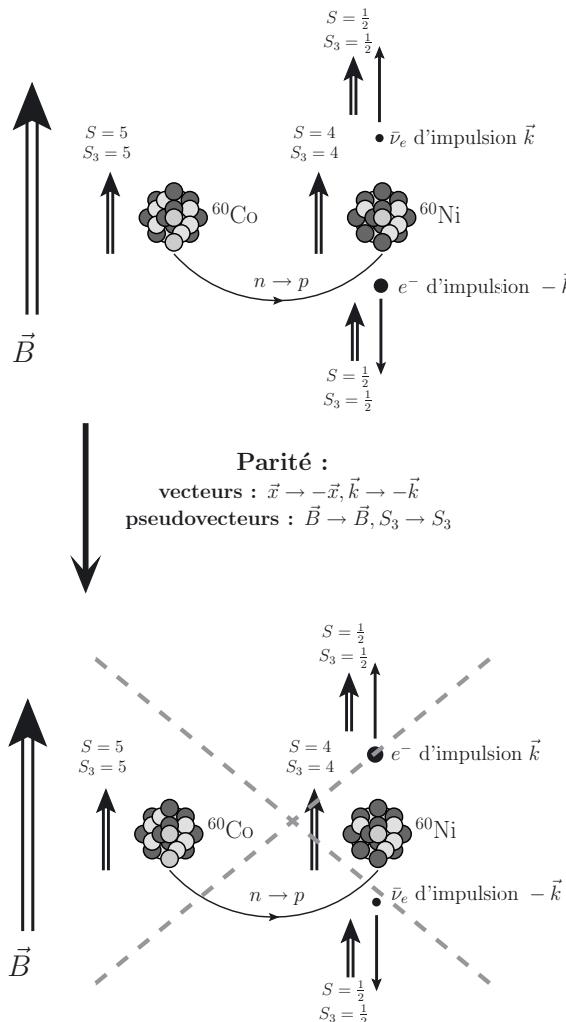


Figure 5.3 – Expérience de C.S. Wu : mise en évidence de la violation de parité dans la désintégration β du cobalt 60.

invariante sous parité il doit y avoir exactement le même nombre d'électrons émis vers le haut et vers le bas. Si on mesure une asymétrie entre haut et bas, c'est qu'il y a violation de parité par l'interaction faible. Or les électrons ne sont émis que vers le bas : ainsi l'interaction faible viole la symétrie de parité, et ce de manière maximale.

En terme de champs, la symétrie de parité transforme la composante gauche d'un spinor en sa composante droite, et inversement. La violation de parité doit donc se traduire par des couplages différents pour les composantes gauche et droite qui sont alors des particules distinctes portant des charges faibles différentes.

La violation de parité maximale par les courants chargés (désintégration β) se traduit par un couplage de cette interaction uniquement à la composante gauche. La matrice γ_5

permet de construire un opérateur de projection $1 - \gamma_5$ qui isole la composante gauche du spinor. Le terme de couplage entre un boson W , un électron et un neutrino électronique est alors de la forme :

$$\mathcal{L}_{int} = -ig\bar{\psi}_e\gamma^\mu W_\mu\psi_{\nu_e} + ig\bar{\psi}_e\gamma^\mu\gamma^5 W_\mu\psi_{\nu_e}. \quad (5.24)$$

3.4 Modèle électrofaible et mécanisme de Higgs

Dans le lagrangien libre, le terme de masse des fermions s'écrit :

$$\begin{aligned} -m\bar{\psi}\psi = -m\psi^+\gamma^0\psi &= -m(\chi_L^+, \chi_R^+)\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} \\ &= -m(\chi_L^+, \chi_R^+)\begin{pmatrix} \chi_R \\ \chi_L \end{pmatrix} \\ &= -m(\chi_L^+\chi_R + \chi_R^+\chi_L). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ce terme couple les composantes gauche et droite et ne sera pas invariant de jauge si les deux composantes se transforment différemment. Ainsi l'interaction faible n'est pas compatible avec des fermions massifs. Néanmoins, le mécanisme de Higgs permet de refaire apparaître des termes similaires. Dans le modèle standard, on décrit simultanément l'interaction faible et l'interaction électromagnétique. Cette théorie électrofaible a été développée dans les années 1960 par Sheldon Lee Glashow, Abdus Salam et Steven Weinberg (tout trois prix Nobel en 1979). Le groupe de jauge de l'interaction électrofaible est donc $SU(2) \times U(1)$ (les charges associées à ce groupe $U(1)$ ne sont pas exactement les charges électriques). Il y a quatre bosons de jauge : W^+ , W^- , Z et le photon A . Les bosons W^\pm ne sont couplés qu'aux composantes gauches des fermions, le Z se couple aux deux composantes mais avec des intensités (charges) différentes et le photon a le même couplage assurant ainsi l'invariance par parité de l'électromagnétisme. Cette symétrie est brisée par un mécanisme de Higgs et il reste une symétrie exacte $U(1)$ du lagrangien. Les trois bosons W^\pm et Z acquièrent alors une masse mais le photon reste de masse nulle.

Les termes de masse des fermions découlent du couplage de la valeur dans le vide du champ de Higgs aux fermions par couplage de Yukawa.

Le lagrangien du modèle standard est donc similaire au lagrangien (5.18), en augmentant le nombre de fermions et de bosons de jauge. De plus, le terme $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ pour les interactions faible et forte comporte quelques termes supplémentaires, induisant des couplages entre les bosons de jauge d'une même interaction.

Les points clefs du chapitre

- 1 À partir d'un champ fermionique libre, on peut introduire une interaction dans la théorie en imposant une symétrie locale supplémentaire. Cette symétrie n'est possible qu'en ajoutant à la théorie un champ vectoriel de masse nulle, dit champ de jauge, qui véhicule l'interaction.
- 2 Le terme d'interaction du lagrangien décrit le ou les vertex d'interactions élémentaires entre fermions et champs de jauge.
- 3 Pour obtenir des champs de jauge massifs, tels les bosons W^\pm et Z de l'interaction faible, il est nécessaire de rajouter à la théorie un champ scalaire muni d'un potentiel présentant des minima dégénérés pour un champ non nul. C'est la brisure spontanée de symétrie ou mécanisme de Higgs. Le lagrangien est invariant de jauge mais le choix d'une valeur du vide parmi l'ensemble des solutions dégénérées brise la symétrie.
- 4 Le champ de Higgs se décompose en trois éléments : la valeur non nulle dans le vide, le boson de Higgs et le ou les bosons de Goldstone qui n'ont pas d'effet physique du fait de l'invariance de jauge. Le boson de Higgs permet de tester ce modèle en introduisant de nouveaux phénomènes observables dans le modèle standard.
- 5 Le couplage du champ de jauge à la valeur dans le vide du champ de Higgs génère leur masse. De la même manière, les masses des fermions résultent des couplages de Yukawa entre la valeur dans le vide du champ de Higgs et le champ spinoriel.
- 6 Les interactions faible et forte qui reposent sur l'invariance de jauge sous les groupes non abéliens $SU(2)$ et $SU(3)$ possèdent une phénoménologie plus riche que l'électromagnétisme. En particulier il existe des vertex à trois ou quatre bosons de jauge.



Entraînez-vous

5.1 Analyse dimensionnelle

- a) À partir des densités lagrangiennes, déterminez la dimension d'un champ scalaire, spinoriel et vectoriel.
- b) Justifiez que l'on ne peut pas avoir de terme proportionnel à $|\varphi|^6$ dans le potentiel de Higgs.
- c) En déduire les termes de couplage, dont la constante de couplage a la dimension d'une puissance positive de l'énergie. Pour chacun de ces couplages, donner une interprétation physique avec des particules du modèle standard.

5.2 Équations de Maxwell

Le lagrangien \mathcal{L}_{QED} décrit des charges en interaction. On pose le quadrivecteur $j^\mu = -g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

- a) Dérivez le lagrangien par rapport au champ du photon A_ν .
- b) Dérivez le lagrangien par rapport à une dérivée du champ du photon $\partial_\nu A_\mu$.
- c) En déduire une partie des équations du mouvement.
- d) Montrez que $-\frac{1}{g}j^0$ correspond à la densité d'électrons.
- e) En identifiant ces équations avec les équations de Maxwell, déterminez la valeur du couplage g pour l'électromagnétisme et donnez une interprétation du quadrivecteur $j^\mu = -g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

5.3 Projecteurs de chiralité

À partir des matrices de Dirac, on définit la matrice $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

- a) Explicitez γ^5 dans la représentation standard des matrices de Dirac. On considère un fermion massif d'impulsion $\vec{k} = (0, 0, k)$.
- b) Donnez l'expression des solutions de l'équation de Dirac pour la particule d'impulsion \vec{k} et d'hélicité $\pm\frac{1}{2}$. Montrez que ces états sont états propres de γ^5 . Est-ce toujours le cas si $m \neq 0$?
- c) Montrez que $\Lambda^\pm = \frac{\mathbb{1} \pm \gamma^5}{2}$ sont des projecteurs d'hélicité.

Dans le cas d'une particule massive les projecteurs Λ^\pm ne sont plus les projecteurs d'hélicité. On les appelle projecteurs de chiralité. Considérons une autre représentation des matrices de Dirac, dite représentation de Weyl :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

- d) Explicitez γ^5 et appliquez les opérateurs de projection Λ^\pm à un spineur quelconque. Conclure.
- e) En vous appuyant sur l'exercice 4.4, justifiez que la violation de parité des interactions faibles nécessite de faire apparaître des termes faisant intervenir γ_5 dans le lagrangien d'interaction.

Diagrammes de Feynman

Introduction

Les systèmes physiques qui peuvent être effectivement étudiés expérimentalement sont limités. Les états liés, qui concernent principalement l'interaction forte, seront discutés au chapitre 7. Nous allons nous intéresser ici aux processus de diffusion entre particules.

Objectifs

Connaître l'ensemble des interactions élémentaires du modèle standard intervenant dans les processus de désintégration et de diffusion de deux particules observables dans les collisionneurs de particules.

Identifier qualitativement les différentes voies reliant un état initial à un état final et l'amplitude relative des diagrammes associés.

Définir la matrice de diffusion et le formalisme des règles de Feynman.

Expliquer le développement perturbatif de l'amplitude de diffusion et sa représentation graphique via les diagrammes de Feynman.

Plan

- 1 Processus de diffusion
- 2 Calcul des éléments de matrice
- 3 Règles et diagrammes de Feynman
- 4 Les vertex du modèle standard
- 5 Renormalisation

1 Processus de diffusion

1.1 Opérateur d'évolution

En représentation d'interaction, on peut utiliser les solutions des équations libres pour décrire les champs en interaction. Le hamiltonien du système se décompose en une partie décrivant la propagation libre \mathcal{H}_0 et un terme d'interaction \mathcal{V}_I . Dans cette représentation, l'opérateur d'évolution entre le temps t_i et le temps t_f satisfait :

$$|\psi(t_f)\rangle_I = U(t_f, t_i) |\psi(t_i)\rangle_I, \quad (6.1)$$

et, à partir de l'équation de Schrödinger en représentation d'interaction, on détermine que cet opérateur obéit à l'équation :

$$i \frac{d}{dt} U(t_f, t_i) = \mathcal{V}_I(t) U(t, t_i). \quad (6.2)$$

En utilisant la condition $U(t, t) = \mathbb{1}$, on peut intégrer cette équation en :

$$U(t_f, t_i) = \mathbb{1} - i \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{V}_I(t) U(t, t_i) dt. \quad (6.3)$$

Puis, en remplaçant U par son expression dans le second membre, il vient :

$$\begin{aligned} U(t_f, t_i) &= \mathbb{1} - i \int_{t_i}^{t_f} \left(\mathcal{V}_I(t) (\mathbb{1} - i \int_{t_i}^t \mathcal{V}_I(t') U(t', t_i) dt') \right) \\ &= \mathbb{1} - i \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{V}_I(t) dt + i^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \mathcal{V}_I(t) \mathcal{V}_I(t') U(t', t_i) \\ &= \mathbb{1} - i \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{V}_I(t) dt + i^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \mathcal{V}_I(t) \mathcal{V}_I(t') \\ &\quad - i^3 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \int_{t_i}^{t'} dt'' \mathcal{V}_I(t) \mathcal{V}_I(t') \mathcal{V}_I(t'') U(t'', t_i) \\ &= \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dans chaque intégrale, les opérateurs hamiltoniens apparaissent ordonnés en temps. On définit le T -produit de deux opérateurs par :

$$T [f(t_1)g(t_2)] = \begin{cases} f(t_1)g(t_2) & \text{si } t_1 > t_2, \\ g(t_2)f(t_1) & \text{si } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (6.5)$$

La symétrie du T -produit¹ implique que :

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' T[\mathcal{V}_I(t) \mathcal{V}_I(t')] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_t^{t_f} dt' T[\mathcal{V}_I(t) \mathcal{V}_I(t')], \quad (6.6)$$

où le premier terme est naturellement ordonné en temps. Le T -produit va permettre de faire disparaître les intégrales imbriquées. En sommant ces deux termes, on obtient :

$$T \left[\left(\int_{t_i}^{t_f} \mathcal{V}_I(t) dt \right)^2 \right] = 2 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' \mathcal{V}_I(t) \mathcal{V}_I(t'). \quad (6.7)$$

Par extension :

$$T \left[\left(\int_{t_i}^{t_f} \mathcal{V}_I(t) dt \right)^n \right] = n! \int_{t_i}^{t_f} dt_1 \int_{t_i}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_i}^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{V}_I(t_1) \dots \mathcal{V}_I(t_n). \quad (6.8)$$

1. Pour une fonction symétrique $f(t, t') = f(t', t)$ quelconque, l'ordre d'intégration n'a pas d'importance : $\int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^t dt' f(t, t') = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_t^{t_f} dt' f(t, t')$.

Finalement, en généralisant par récursion l'équation (6.4) :

$$U(t_f, t_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-i)^k}{k!} T \left[\left(\int_{t_i}^{t_f} \mathcal{V}_I(t) dt \right)^k \right]. \quad (6.9)$$

C'est le développement en série de Dyson de l'opérateur d'évolution, noté de manière plus compacte :

$$U(t_f, t_i) = T \left[e^{-i \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{V}_I(t) dt} \right]. \quad (6.10)$$

1.2 Matrice de diffusion

Un processus de diffusion décrit la transition entre un état initial $|i\rangle$ composé de particules libres à $t = -\infty$ et un état final libre également à $t = +\infty$. La condition $t = +\infty$ signifie simplement que l'interaction est localisée, la propagation des particules est donc libre loin de la zone d'interaction. La transition implique une interaction des particules de l'état initial, entre elles ou avec un potentiel extérieur. La très grande majorité des expériences de physique des particules se résume à des problèmes de diffusion, qu'il s'agisse de la désintégration d'une particule (état initial à une seule particule) ou de la collision entre deux particules. C'est donc principalement ce type de processus que l'on souhaite décrire, le but final étant de pouvoir calculer les probabilités de transition et les sections efficaces d'interaction à partir de la théorie.

Prenons l'exemple de l'annihilation d'un électron et d'un positron donnant naissance à un muon et à un antimuon. Cette interaction a été extensivement étudiée expérimentalement. Pour la décrire complètement, il faut connaître le lagrangien libre du champ de l'électron, \mathcal{L}_0^e , celui du champ du muon, \mathcal{L}_0^μ , ainsi que le lagrangien d'interaction, $\mathcal{L}_{int}^{e\mu}$, couplant les quatre particules. Le lagrangien total est alors :

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_0^e + \mathcal{L}_0^\mu + \mathcal{L}_{int}^{e\mu}. \quad (6.11)$$

La probabilité de transition de l'état initial vers l'état final est donné par le recouvrement des états à $t = +\infty$:

$$P = |\langle f | i(+\infty) \rangle|^2, \quad |i(+\infty) \rangle = U(-\infty, +\infty) |i\rangle. \quad (6.12)$$

L'opérateur d'évolution définit la matrice de diffusion $S = U(-\infty, +\infty)$.

La transition de $|i\rangle$ vers $|f\rangle$ est décrite par l'élément de matrice :

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \langle \mu^+ \mu^- | S | e^+ e^- \rangle. \quad (6.13)$$

La matrice de diffusion est unitaire ($S^+ S = \mathbb{1}$) pour assurer l'interprétation de $|S_{fi}|^2$ comme la probabilité de la transition. En effet, la somme des probabilités de transition de l'état i vers tous les autres états vaut 1, soit :

$$S^+ S = \mathbb{1} \Rightarrow \sum_k S_{ki}^+ S_{jk} = \delta_{ij} \Rightarrow \sum_k S_{ik}^* S_{ik} = \sum_k |S_{ik}|^2 = 1. \quad (6.14)$$

Dans l'analogie classique, la partie libre \mathcal{H}_0 du hamiltonien correspond à l'énergie cinétique et le terme d'interaction \mathcal{V}_I à l'énergie potentielle. Le lagrangien est de la forme $\mathcal{H}_0 - \mathcal{V}_I$. Au signe près, le hamiltonien d'interaction équivaut au lagrangien d'interaction, soit en terme de densité lagrangienne :

$$\mathcal{V}_I(t) = - \int \mathcal{L}_{int} d^3x. \quad (6.15)$$

À partir de l'expansion en série de Dyson, on peut relier la matrice S au lagrangien d'interaction par :

$$S = U(-\infty, +\infty) = T \left[e^{-i \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{V}_I(t) dt} \right] = T \left[e^{i \int \mathcal{L}_{int} d^4x} \right]. \quad (6.16)$$

Chaque terme du lagrangien d'interaction décrit une interaction élémentaire, un vertex. Un produit de deux facteurs contient deux interactions successives : le T -produit assure la causalité du processus. Ce T -produit est source de difficultés de calcul qui ne seront pas abordées par la suite.

Ici encore, on voit le rôle central que joue le lagrangien dans la théorie puisque c'est le lagrangien d'interaction qui va permettre le calcul des probabilités d'interaction des processus de diffusion et donc de produire des résultats théoriques confrontables à l'expérience.

1.3 Largeur et section efficace

Il n'y a que deux types d'interaction qui sont réellement réalisables en laboratoire :

- la désintégration d'une particule en plusieurs particules, dit processus $1 \rightarrow N$.
- l'interaction de deux particules, donnant éventuellement lieu à l'apparition de nouvelles particules, ou processus $2 \rightarrow N$. C'est ce type d'interaction qui est étudié lors de collisions de deux particules.

L'aspect cinématique de ces deux configurations a été vu au paragraphe 1.4.

Expérimentalement, on mesure un taux d'interactions $r = \frac{dn}{dt}$, c'est-à-dire le nombre d'occurrences par unité de temps d'un état final $|f\rangle$ à partir d'un état initial $|i\rangle$. La probabilité d'interaction de $|i\rangle$ vers $|f\rangle$, par unité de temps, est donné par le carré de l'élément de matrice de diffusion :

$$dP = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{t} = \frac{|S_{fi}|^2}{t}. \quad (6.17)$$

La durée de mesure t est supposée très supérieure au temps typique de l'interaction.

Désintégration de particules : pour N particules dans l'état initial, la probabilité est reliée au taux d'événements observés par :

$$dP = \frac{r}{N} = \frac{1}{N} \frac{dn}{dt}. \quad (6.18)$$

Dans ce cas, la probabilité d'interaction s'appelle la **largeur partielle de désintégration** vers l'état $|f\rangle$, $\Gamma_f = dP$. Le taux d'événements est alors :

$$r = \Gamma N. \quad (6.19)$$

C'est une grandeur homogène à l'inverse d'un temps. La largeur totale de désintégration Γ est obtenue en sommant sur tous les états finals possibles :

$$\Gamma = \sum_f \Gamma_f. \quad (6.20)$$

On définit également le **rapport d'embranchement** vers un état final comme la fraction de désintégrations vers cet état final, soit :

$$BR_f = \frac{\Gamma_f}{\sum_f \Gamma_f} = \frac{\Gamma_f}{\Gamma}. \quad (6.21)$$

Pour N particules dans l'état initial au temps $t = 0$, le nombre de particules restantes $n_r(t) = N - n(t)$ après un temps t est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dn_r}{dt} = -N\Gamma, \quad n_r(0) = N, \quad (6.22)$$

soit :

$$n_r(t) = e^{-\Gamma t} = e^{-t/\tau}, \quad (6.23)$$

où τ est la durée de vie propre (dans le référentiel du centre de masse) de la particule.

Diffusion de deux particules : le taux d'interactions va dépendre du nombre de particules qui se rencontrent et de la probabilité d'interaction de deux particules. Experimenteralement, on fait collisionner des paquets de particules². Pour deux paquets de N_1 et N_2 particules d'impulsions respectives k_1 et k_2 entrant en collision, la probabilité d'interaction par unité de temps sera :

$$dP = \frac{r}{N_1 N_2} = \frac{1}{N_1 N_2} \frac{dn}{dt}. \quad (6.24)$$

Dans le cas d'une désintégration, on a séparé l'expression du taux d'événements en un terme qui ne dépend que de l'interaction d'une particule et un terme prenant en compte le nombre de particules. On voudrait avoir une relation similaire pour une diffusion :

$$r = L\sigma. \quad (6.25)$$

La luminosité L caractérise le nombre de particules qui se rencontrent. En se plaçant dans le référentiel du centre de masse du premier paquet, L doit être proportionnel au nombre de particules dans le premier paquet multiplié par le flux de particules incidentes, soit :

$$L = \Phi N_1 N_2, \quad (6.26)$$

2. C'est le cas dans un collisionneur de particules. Pour une expérience sur cible fixe, la cible peut être vue comme l'un des paquets, immobile dans le référentiel du laboratoire.

où Φ est le flux de particules normalisé. Ce flux ne dépend que de la cinématique de la collision. On montre que $\Phi = 4\sqrt{(k_1 k_2)^2 - (m_1 m_2)^2}$. Le facteur σ caractérise la probabilité d'interaction entre deux particules d'impulsion k_1 et k_2 entrant en collision. Ce terme σ doit être homogène à une surface, c'est la **section efficace** qui est proportionnelle à la probabilité d'interaction.

La théorie va permettre de calculer l'élément de matrice S_{fi} . À partir de ce dernier, on est capable de déterminer les taux d'événements attendus lors d'une désintégration où une diffusion. Donc, à partir d'un modèle très abstrait de théorie quantique des champs, le calcul de la matrice de diffusion va conduire à des résultats qui pourront être comparés à des données expérimentales. La matrice S étant elle-même liée au lagrangien, les paramètres libre du modèle, en particulier les constantes de couplage des interactions, sont des paramètres mesurables.

2 Calcul des éléments de matrice

2.1 Développement perturbatif

Au chapitre 5, on a discuté qu'un lagrangien d'interaction entre plusieurs champs s'écrit sous la forme $\mathcal{L}_{int} = g\Pi$, où g est une constante numérique caractérisant l'intensité de l'interaction et Π un produit des champs ou de leurs dérivées. Des exemples des ces termes sont donnés par :

- le couplage spineur-spineur-vecteur : $g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$
- le couplage spineur-spineur-scalaire : $-\lambda_f\bar{\psi}h\psi$
- le couplage scalaire-vecteur-vecteur : $g^2vhA_\mu A^\mu$
- le couplage scalaire-scalaire-vecteur-vecteur : $g^2hhA_\mu A^\mu$
- ...

Le développement de la série de Dyson pour la matrice S est :

$$S = T \left[\mathbb{1} + i \int \mathcal{L}(x) d^4x + \frac{i^2}{2!} \iint \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(x') d^4x d^4x' + \frac{i^3}{3!} \iiint \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(x') \mathcal{L}(x'') d^4x d^4x' d^4x'' + \dots \right]. \quad (6.27)$$

Chaque terme du développement est proportionnel à une puissance de la constante de couplage :

$$S = T \left[\mathbb{1} + ig \int \Pi + \frac{i^2}{2!} g^2 \iint \Pi \Pi' + \frac{i^3}{3!} g^3 \iiint \Pi \Pi' \Pi'' + \dots \right]. \quad (6.28)$$

Si cette constante est petite, $g \ll 1$, les termes d'ordre élevé dans la série deviennent négligeables. On peut alors se limiter à l'ordre le plus bas du développement, les termes d'ordre supérieur se traitant comme des corrections.

2.2 Désintégration scalaire → fermion-antifermion

Afin d'illustrer ce développement perturbatif, nous allons expliciter une partie du calcul de l'élément de matrice S au premier ordre non nul pour la désintégration d'un scalaire en deux fermions. C'est un processus étudié au LHC dans le cas particulier de la désintégration d'un boson de Higgs en une paire de leptons τ . Le couplage de Yukawa entre le boson de Higgs et un fermion est proportionnel à la masse du fermion. Ainsi, le boson de Higgs aura un couplage plus important avec les particules lourdes, ce qui justifie le choix du lepton τ dans l'état final (le τ est le lepton le plus lourd).

On s'intéresse donc à la transition d'un état initial $|i\rangle = |h_k\rangle$ composé d'un scalaire d'impulsion k vers un état final $|f\rangle = |\tau_{p's'}^+ \tau_{ps}^-\rangle$ composé d'un fermion d'impulsion p et d'hélicité s , et d'un antifermion d'impulsion p' et d'hélicité s' . Il faut maintenant déterminer l'élément de matrice $S_{fi} = \langle \tau^+ \tau^- | S | h \rangle$. Les deux états sont formés par application d'opérateurs de création sur le vide :

$$|h_k\rangle = a_k^+ |0\rangle, \quad |\tau_{p's'}^+ \tau_{ps}^-\rangle = d_{p's'}^+ b_{ps}^+ |0\rangle. \quad (6.29)$$

La lagrangien d'interaction est issu du lagrangien de Yukawa :

$$\mathcal{L} = -\lambda_f \bar{\psi} h \psi. \quad (6.30)$$

Au premier ordre, il n'y a qu'une seule coordonnée d'espace-temps et le T -produit n'intervient pas. Ce ne serait plus le cas si on considérait les ordres supérieurs. L'élément de matrice s'écrit donc :

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \left\langle \tau_{p's'}^+ \tau_{ps}^- \left| \mathbb{1} + i \int d^4x \mathcal{L} \right| h_k \right\rangle \\ &= -i \lambda_f \int d^4x \left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} \bar{\psi} h \psi a_k^+ \right| \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Le terme d'ordre 0, $\left\langle \tau_{p's'}^+ \tau_{ps}^- \left| h_k \right. \right\rangle$ est nul par orthogonalité des états de Fock.

En introduisant les expressions analytiques des champs données par les équations (4.59), (4.63) et (4.64), il vient alors :

$$\begin{aligned}
 S_{fi} = & -i\lambda_f \int d^4x \left[\left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} \right. \right. \right. \\
 & \times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3l \frac{1}{\sqrt{2\omega_l}} \sum_{r=1,2} \left(\bar{u}_{l,r} b_{l,r}^+ e^{ilx} + \bar{v}_{l,r} d_{l,r} e^{-ilx} \right)}_{=\bar{\psi}} \\
 & \times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3q \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \left[a_q e^{-iqx} + a_q^+ e^{iqx} \right]}_{=h} \\
 & \times \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3l' \frac{1}{\sqrt{2\omega_{l'}}} \sum_{r'=1,2} \left(u_{l',r'} b_{l',r'} e^{-il'x} + v_{l',r'} d_{l',r'}^+ e^{il'x} \right)}_{=\psi} \\
 & \left. \left. \left. \times a_k^+ \right| \right\rangle \right]. \tag{6.32}
 \end{aligned}$$

Dans cette expression, on peut inverser l'ordre des différentes intégrales et sommes. De plus, le produit de champs se développe en 8 termes contenant des opérateurs création et annihilation. L'élément de matrice devient alors :

$$\begin{aligned}
 S_{fi} = & \frac{-i\lambda_f}{(2\pi)^{\frac{9}{2}}} \int d^3l d^3q d^3l' \sum_{r,r'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_l} \sqrt{2\omega_q} \sqrt{2\omega_{l'}}} \\
 & \times \int d^4x \left[\left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q b_{l',r'} a_k^+ \right| \right\rangle \bar{u}_{l,r} u_{l',r'} e^{i(l-q-l')x} \right. \\
 & + \left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q d_{l',r'}^+ a_k^+ \right| \right\rangle \bar{u}_{l,r} v_{l',r'} e^{i(l-q+l')x} \\
 & + \left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q^+ b_{l',r'} a_k^+ \right| \right\rangle \bar{u}_{l,r} u_{l',r'} e^{i(l+q-l')x} \\
 & + \left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q^+ d_{l',r'}^+ a_k^+ \right| \right\rangle \bar{u}_{l,r} v_{l',r'} e^{i(l+q+l')x} \\
 & + \left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} d_{l,r} a_q b_{l',r'} a_k^+ \right| \right\rangle \bar{v}_{l,r} u_{l',r'} e^{i(-l-q-l')x} \\
 & + \left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} d_{l,r} a_q^+ b_{l',r'} a_k^+ \right| \right\rangle \bar{v}_{l,r} v_{l',r'} e^{i(-l-q+l')x} \\
 & + \left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} d_{l,r} a_q^+ b_{l',r'}^+ a_k^+ \right| \right\rangle \bar{v}_{l,r} u_{l',r'} e^{i(-l+q-l')x} \\
 & \left. + \left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} d_{l,r} a_q^+ d_{l',r'}^+ a_k^+ \right| \right\rangle \bar{v}_{l,r} v_{l',r'} e^{i(-l+q+l')x} \right]. \tag{6.33}
 \end{aligned}$$

En utilisant les règles de commutation et d'anticommuation des opérateurs, on montre que sept des huit termes sont nuls. Ainsi, dans le premier terme, $\langle \left| b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q b_{l',r'} a_k^+ \right| \rangle$, l'opérateur $b_{l',r'}$ commute avec a_k^+ et :

$$\langle \left| b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q b_{l',r'} a_k^+ \right| \rangle = \langle \left| b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q b_{l',r'} a_k^+ b_{l',r'} \right| \rangle = 0, \tag{6.34}$$

puisque l'on applique un opérateur d'annihilation au vide. Le seul terme qui ne s'annule pas est celui qui détruit l'état initial et recrée l'état final, ce qui était attendu. Le calcul de S_{fi} sélectionne parmi tous les vertex décrits par le lagrangien (voir figure 5.1) celui (ou ceux) qui correspond à l'interaction étudiée. L'élément de matrice se réduit alors à :

$$S_{fi} = \frac{-i\lambda_f}{(2\pi)^{\frac{9}{2}}} \int d^3 l d^3 q d^3 l' \sum_{r,r'} \frac{1}{\sqrt{2\omega_l} \sqrt{2\omega_q} \sqrt{2\omega_{l'}}} \times \int d^4 x \langle | b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q d_{l',r'}^+ a_k^+ | \rangle \bar{u}_{l,r} v_{l',r'} e^{i(l+l'-q)x}. \quad (6.35)$$

On peut réécrire le braket :

$$\left\langle \left| b_{ps} d_{p's'} b_{l,r}^+ a_q d_{l',r'}^+ a_k^+ \right| \right\rangle = \left\langle \left| b_{ps} b_{l,r}^+ d_{p's'} d_{l',r'}^+ a_q a_k^+ \right| \right\rangle. \quad (6.36)$$

Puis, en utilisant le fait que :

$$[a_q, a_k^+]_- = \delta_{qk} \Rightarrow a_q a_k^+ = \delta_{qk} + a_k a_q^+, \quad (6.37)$$

$$\left[b_{ps}, b_{l,r}^+ \right]_+ = \delta_{pl} \delta_{rs} \Rightarrow b_{ps} b_{l,r}^+ = \delta_{pl} \delta_{rs} - b_{l,r}^+ b_{ps}, \quad (6.38)$$

$$\left[d_{p's'}, d_{l',r'}^+ \right]_+ = \delta_{p'l'} \delta_{r's'} \Rightarrow d_{p's'} d_{l',r'}^+ = \delta_{p'l'} \delta_{r's'} - d_{l',r'}^+ d_{p's'}, \quad (6.39)$$

il vient :

$$\left\langle \left| b_{ps} b_{l,r}^+ d_{p's'} d_{l',r'}^+ a_q a_k^+ \right| \right\rangle = \delta_{qk} \delta_{pl} \delta_{rs} \delta_{p'l'} \delta_{r's'} \langle | \rangle = \delta_{qk} \delta_{pl} \delta_{rs} \delta_{p'l'} \delta_{r's'}. \quad (6.40)$$

Les symboles de Kronecker permettent de simplifier l'expression de S_{fi} :

$$S_{fi} = \frac{-i\lambda_f}{(2\pi)^{\frac{9}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p} \sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{p'}}} \bar{u}_{p,s} v_{p',s'} \int d^4 x e^{i(p+p'-k)x}. \quad (6.41)$$

Enfin, on reconnaît dans la dernière intégrale une transformée de Fourier inverse de la fonction constante $f(x) = 1$, qui donne une distribution de Dirac :

$$\int d^4 x e^{i(p+p'-k)x} = \delta(p + p' - k), \quad (6.42)$$

d'où finalement :

$$S_{fi} = \frac{-i\lambda_f (2\pi)^4}{(2\pi)^{\frac{9}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p} \sqrt{2\omega_k} \sqrt{2\omega_{p'}}} \delta(p + p' - k) \bar{u}_{p,s} v_{p',s'}, \quad (6.43)$$

ou encore de manière plus générale :

$$S_{fi} = -i \underbrace{\left((2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \prod_i^{4\text{-imp}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\omega_i}} \right)}_{\text{Cinématique}} \times \underbrace{\left(\lambda_f \bar{u}_{p,s} v_{p',s'} \right)}_{\text{Amplitude de Feynman}}, \quad (6.44)$$

avec $p_i = k$ et $p_f = p + p'$ les quadri-impulsions initiale et finale. L'amplitude de diffusion se décompose en deux termes : un terme décrivant la cinématique de

l'interaction, avec notamment le terme $\delta(p_f - p_i)$ qui traduit la conservation de la quadri-impulsion et un terme décrivant les couplages entre les différents champs, l'amplitude de Feynman \mathcal{M}_{fi} .

3

Règles et diagrammes de Feynman

La désintégration que l'on vient d'étudier peut se représenter sous la forme d'un diagramme temps-espace donné sur la figure 6.1. Il s'agit d'un **diagramme de Feynman**. Ce diagramme est une traduction schématique de l'amplitude de Feynman. Chaque élément du diagramme (lignes et vertex) correspond à un facteur multiplicatif dans l'amplitude de Feynman, ce sont les **règles de Feynman**. À partir de l'amplitude calculée précédemment, on peut dériver les règles associées à chaque ligne et vertex de ce diagramme. Elles sont données dans la table 6.1. Formellement, la lecture du diagramme permet d'écrire :

$$i\mathcal{M}_{fi} = \text{scalaire entrant} \times \text{vertex} \times \text{fermion sortant} \times \text{antifermion sortant},$$

soit ici :

$$i\mathcal{M}_{fi} = i \times 1 \times -i\lambda_f \times \bar{u}_{ps} \times v_{p',s'} = \lambda_f \bar{u}_{ps} v_{p',s'}. \quad (6.45)$$

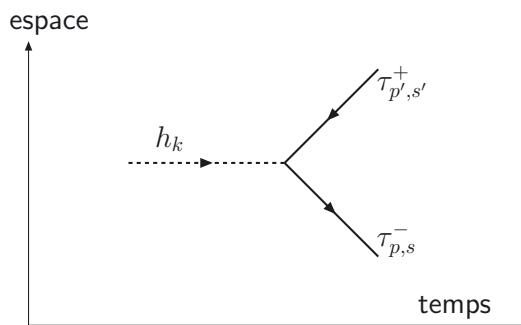


Figure 6.1 – Diagramme de Feynman de la désintégration $h \rightarrow \tau^+ \tau^-$.

De la même manière on peut déterminer les règles de Feynman pour les autres types de lignes externes et de vertex. Les symboles utilisés pour les différents types de particules (scalaires, fermions, bosons vecteurs) sont donnés dans la figure 6.2.

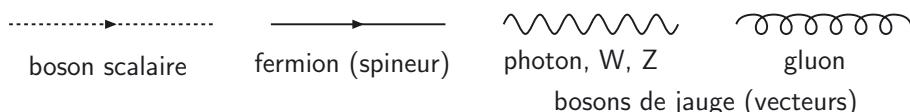


Figure 6.2 – Symboles utilisés dans les diagrammes de Feynman pour représenter les différents types de particules.

Tableau 6.1 – Règles de Feynman pour des champs scalaires et spinoriels en interaction.

Objet physique	Diagramme	Règle de Feynman
Scalaire initial	h_k ----->	1
Fermion final	$f_{p,s}$ ----->	$\bar{u}_{p,s}$
Antifermion final	$\bar{f}_{p,s}$ -----<	$u_{p',s'}$
Vertex scalaire-spineur	-----> -> ->	$-i\lambda_f$

On s'est limité jusqu'à présent à des diagrammes ne présentant qu'un unique vertex. De tels diagrammes ne peuvent décrire une interaction comme la diffusion Compton $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ puisqu'un tel vertex n'existe pas. Il faut donc deux vertex pour décrire une telle interaction : un premier du type $\gamma e^- \rightarrow e^-$ au temps t_1 et un second $e^- \rightarrow \gamma e^-$ au temps $t_2 \geq t_1$. Une telle configuration est décrite par le terme d'ordre 2 du développement perturbatif de la matrice de diffusion :

$$S^{(2)} = T \left[\frac{i^2}{2!} \iint \mathcal{L}(x) \mathcal{L}(x') d^4x d^4x' \right], \quad (6.46)$$

où le lagrangien intervient 2 fois. Le T -produit assure la causalité de l'interaction en imposant que le premier vertex se déroule avant le second (condition $t_2 \geq t_1$). D'une manière plus générale le terme d'ordre n du développement décrit les diagrammes à n vertex. Ainsi le terme du premier ordre (et donc le lagrangien) décrit la totalité des vertex d'interaction élémentaires. Tous les diagrammes de Feynman peuvent se construire en assemblant ces vertex élémentaires comme des pièces d'un puzzle. La diffusion Compton est ainsi décrite par deux diagrammes donnés sur la figure 6.3.

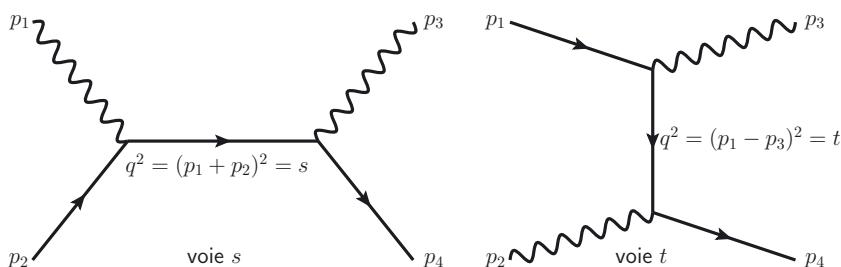


Figure 6.3 – Diagrammes de Feynman de la diffusion Compton en voie s (à gauche) et en voie t (à droite).

Sur ce type de diagramme, on voit apparaître une ligne interne qui relie les vertex. Dans ce cas il s'agit d'un fermion, mais pour d'autres diagrammes on pourrait avoir un scalaire ou un vecteur. Cette ligne est un propagateur qui possède d'autres règles de Feynman. À partir de la figure précédente on définit deux grandeurs :

$$s = (p_1 + p_2)^2 \text{ et } t = (p_1 - p_3)^2, \quad (6.47)$$

qui sont les variables de Mandelstam (il en existe une troisième, $u = (p_1 - p_4)^2$, qui n'interviendra pas dans notre discussion). Dans le cas du premier diagramme, la propagateur est horizontal et s est le carré de l'impulsion du propagateur. On parle de diagramme en voie s . De même, le second diagramme est dit en voie t , avec un propagateur vertical. La quantité \sqrt{s} est aussi l'énergie disponible dans le centre de masse de l'interaction. Pour les lignes externes, les particules sont dites réelles ou sur leur couche de masse : leur masse est égale à la norme de la quadri-impulsion. Ce n'est pas nécessairement le cas pour un propagateur où $p^2 \neq m^2$. Ceci est possible en vertu du principe d'Heisenberg puisque le propagateur n'existe que durant un temps très court entre les deux interactions. On parle alors de particule virtuelle ou de particule hors de sa couche de masse. La quadri-impulsion reste conservée à chaque vertex.

Pour calculer la section efficace d'un processus où la constante de couplage est petite, on se limite au calcul à un ordre fixé dans le développement perturbatif. D'abord, il faut déterminer l'ensemble des diagrammes de Feynman autorisés pour ce processus. Puis, pour chaque diagramme, les règles de Feynman permettent d'expliciter l'amplitude de Feynman qui peut ensuite être calculée en fonction des variables cinématiques s , t et u . Enfin, on en déduit l'élément de matrice de diffusion puis la section efficace. Par exemple, pour un processus $2 \rightarrow 2$, la section efficace différentielle s'écrit dans le référentiel du centre de masse de la collision :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2, \quad (6.48)$$

où Ω est l'angle solide d'émission des particules finales.

Les diagrammes d'ordres supérieurs peuvent éventuellement être calculés comme des corrections supplémentaires. La figure 6.4 donne quelques exemples de diagrammes associés aux différents ordres du développement perturbatif.

L'observable physique (largeur de désintégration ou section efficace) dépend du carré de l'amplitude de Feynman. Si deux diagrammes contribuent à un processus, on a :

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \Rightarrow \mathcal{M}_{fi}^2 = \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + 2\Re(\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2). \quad (6.49)$$

Il est impossible de séparer physiquement les deux diagrammes et il apparaît un terme purement quantique d'interférence entre les deux diagrammes. Ceci peut poser problème puisqu'en coupant à un ordre donné le développement on ignore de nombreux diagrammes. Il faut donc s'assurer que les termes d'interférence non calculés sont bien négligeables. Il faut en particulier noter que l'interférence peut être destructive et avoir une contribution négative.

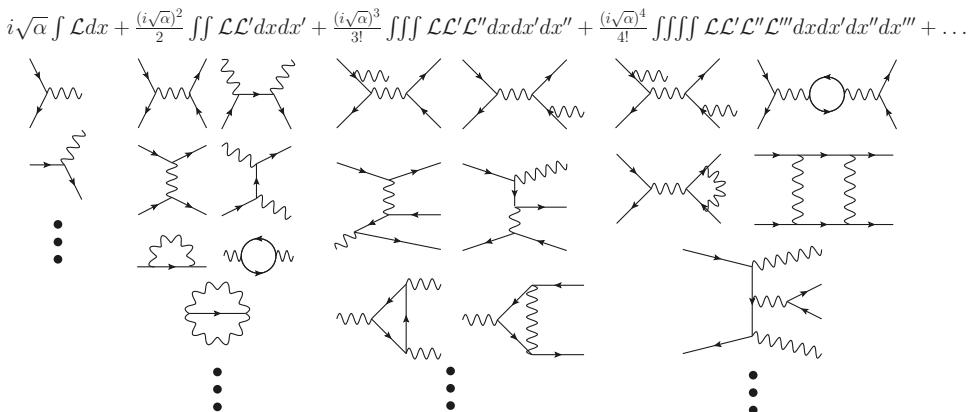


Figure 6.4 – Développement perturbatif de la matrice de diffusion et diagrammes de Feynman.

Le but de ce cours n'est pas de savoir calculer exactement les diagrammes de Feynman mais de pouvoir comparer différents processus à partir des diagrammes. Le lecteur souhaitant apprendre ces calculs pourra se référer aux ouvrages donnés en annexe. Afin de comparer l'amplitude de deux processus, il est juste important de retenir que :

- les vertex sont proportionnels à la charge et à la constante de couplage $\propto q\sqrt{\alpha}$;
- les propagateurs sont proportionnels à l'inverse du carré de la masse et de l'impulsion de la particule $\propto \frac{1}{p^2 - m^2}$.

Par exemple, la diffusion $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ peut se faire par interaction électromagnétique (via un photon) ou par interaction faible (via un boson Z) avec deux diagrammes en voie s . L'ordre de grandeur du rapport des deux amplitudes de Feynman est alors :

$$r = \frac{\mathcal{M}_{EM}}{\mathcal{M}_w} \approx \frac{\sqrt{\alpha_{EM}} \sqrt{\alpha_{EM}}}{s} \frac{s - M_Z^2}{\sqrt{\alpha_w} \sqrt{\alpha_w}} \approx \frac{s - M_Z^2}{s}, \quad (6.50)$$

car les deux couplages sont du même ordre de grandeur. Si cette diffusion est réalisée en envoyant deux électrons de faible énergie ($\sqrt{s} \ll M_Z$) alors $r \gg 1$, le processus électromagnétique domine et on peut négliger la contribution de l'interaction faible. C'est ce type de considérations qui explique l'apparente faiblesse de l'interaction faible à basse énergie (dans les désintégrations β par exemple) qui lui vaut son nom. En revanche, si l'énergie dans le centre de masse est très supérieure à la masse du boson Z , alors $r \approx 1$ et aucun des deux diagrammes n'est négligeable. Enfin, si $\sqrt{s} \approx M_Z$, il se produit un phénomène de résonance et le terme faible devient dominant ($r \ll 1$).

4

Les vertex du modèle standard

On liste ici l'ensemble des vertex autorisés dans le modèle standard de la physique des particules. Tous les diagrammes de Feynman décrivant des interactions du modèle standard peuvent être obtenus en combinant plusieurs de ces vertex. À chaque vertex, on doit vérifier l'ensemble des lois de conservation découlant des invariances de jauge du modèle et de l'invariance de Lorentz, à savoir :

- conservation de la quadri-impulsion,
- conservation du spin,
- conservation de la charge électrique,
- conservation de la saveur des quarks et des leptons (sauf pour les courants chargés faibles),
- conservation de la charge de couleur.

Pour simplifier l'écriture, on notera sur les diagrammes q pour un quark quelconque, l^- pour un lepton chargé et ν_l pour le neutrino associé. Les antiparticules associées seront notées \bar{q} , l^+ et $\bar{\nu}_l$. Enfin, dans le cas de l'interaction faible on distinguera les quarks de charge $\frac{2}{3}$ (u , c et t) notés q_u et les quarks de charge $-\frac{1}{3}$ (d , s et b) notés q_d .

4.1 Secteur électromagnétique

Il n'existe qu'un type de vertex électromagnétique couplant les fermions chargés au photon, donné sur la figure 6.5. Le photon ne porte aucune charge, il est donc sa propre antiparticule. En toute rigueur, l'intensité du couplage est proportionnel à $Q\sqrt{\alpha_{EM}}$, où Q est la charge électrique du fermion.

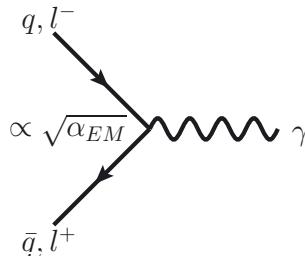


Figure 6.5 – Vertex entre deux fermions chargés et un photon.

4.2 Secteur fort

L'interaction forte concerne les quarks et les gluons. Les quarks portent une des trois charges de couleur (par convention r , v et b) alors que les antiquarks portent une charge d'anticouleur. La théorie de jauge de l'interaction forte repose sur le groupe $SU(3)$ et

fait intervenir des couplages supplémentaires. Dans ces vertex, les indices c_i désignent des couleurs *a priori* différentes : l’interaction forte modifie la charge de couleur des quarks et des gluons. Contrairement au photon, le gluon est porteur d’une charge de couleur et d’une charge d’anticouleur. Il y a huit gluons et l’antiparticule d’un gluon est un autre gluon. Il existe ainsi des interactions entre les gluons eux-mêmes, à savoir des couplages à trois gluons et à quatre gluons. Les couplages à quatre gluons font intervenir le carré de la constante de couplage. Les vertex de l’interaction forte sont donnés sur la figure 6.6.

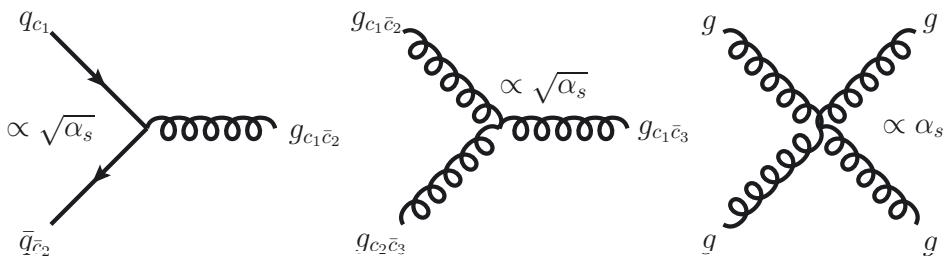


Figure 6.6 – Vertex entre deux fermions colorés et un gluon (à gauche), entre 3 gluons (au centre) et entre 4 gluons (à droite).

4.3 Secteur faible

L’interaction faible, basée sur l’invariance de jauge $SU(2)$, fait apparaître trois bosons de jauge : deux bosons électriquement chargés W^+ et W^- , antiparticule l’un de l’autre et un boson neutre Z qui est sa propre antiparticule. Comme dans le cas des interactions électromagnétique et forte, les courants neutres (échange d’un boson Z) ne modifient pas la saveur. Les courants chargés (échange de W^\pm) sont les seuls susceptibles de modifier la saveur, à savoir de transformer un quark de type d en quark de type u ou un lepton chargé en neutrino et inversement. Il existe trois vertex de couplage aux fermions, représentés sur la figure 6.7. *A priori*, les changements de saveur par courants

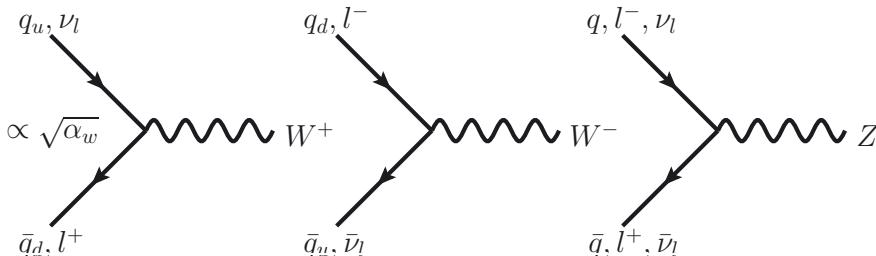


Figure 6.7 – Vertex entre deux fermions et un vecteur de l’interaction faible par courant chargé (à gauche et au centre) et par courant neutre (à droite).

chargés devraient uniquement se faire à l’intérieur d’une même famille, soit $\tau \leftrightarrow \nu_\tau$,

$\mu \leftrightarrow \nu_\mu$, $e \leftrightarrow \nu_e$, $d \leftrightarrow u$, $s \leftrightarrow c$ et $b \leftrightarrow t$. Cependant, les fermions du modèle standard étant massifs, on montre que les états propres de l’interaction faible et les états propres de propagation (particules libres) ne sont pas les mêmes. Il en résulte un mélange des saveurs qui conduit à la possibilité de transition par courants chargés entre deux familles différentes. Dans le secteur des quarks, l’amplitude de ces transitions est caractérisée par une matrice de mélange unitaire, la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ou matrice CKM :

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,974 & 0,226 & 0,004 \\ 0,226 & 0,973 & 0,042 \\ 0,009 & 0,041 & 0,999 \end{pmatrix}. \quad (6.51)$$

Pour un vertex $W q_u q_d$, l’amplitude de Feynman fait intervenir un terme $\propto V_{q_u q_d} \sqrt{\alpha_w}$. Les termes diagonaux de la matrice sont les plus importants et les couplages faibles se font principalement à l’intérieur d’une même famille de quarks. Le couplage entre deux familles est moins probable, ce qui permet d’expliquer la grande durée de vie des particules contenant un quark étrange (K^0 , K^\pm , $\Lambda \dots$). Dans le modèle standard, les neutrinos ont une masse nulle et un tel mélange n’est pas possible. Ce mélange a néanmoins été observé, suggérant que la masse des neutrinos n’est pas rigoureusement nulle. L’extension la plus simple du modèle standard, incluant cet effet, nécessite une nouvelle matrice de mélange dans le secteur des leptons, appelée matrice PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). La phénoménologie associée à cette matrice PMNS sera discutée au chapitre 8. Cet effet de mélange dans le secteur des leptons est extrêmement faible et on peut considérer que seuls les interactions par courants chargés au sein d’une même famille existent dans les processus de diffusion.

Comme dans le cas de l’interaction forte, il existe également des termes de couplages entre bosons de jauge (trois et quatre bosons) incluant le photon puisque les bosons W^\pm portent une charge électrique. Ces vertex supplémentaires sont donnés sur la figure 6.8.

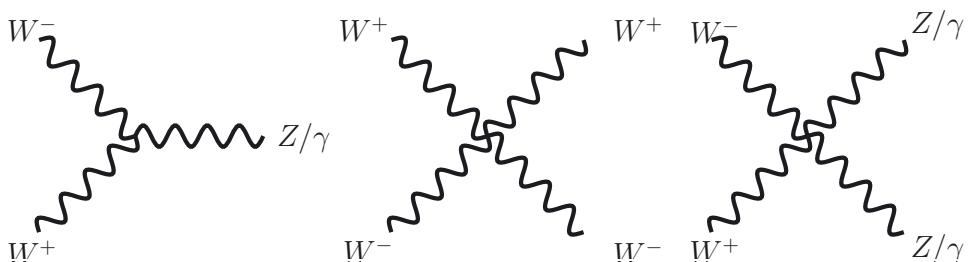


Figure 6.8 – Vertex d’autocouplage entre les bosons électrofaibles.

4.4 Secteur de Higgs

La brisure de la symétrie électrofaible via mécanisme de Higgs conduit à l'apparition d'un boson scalaire neutre, le boson de Higgs. Ce boson est couplé à toutes les particules massives : tous les fermions à l'exception des neutrinos, les bosons de jauge de l'interaction faible (W^\pm et Z) et le boson de Higgs lui-même (termes d'autocouplage dans le potentiel). L'intensité du couplage aux fermions est proportionnelle à la masse du fermion alors que le couplage aux bosons de jauge est proportionnel au carré de la masse du boson. Les différents vertex sont donnés sur les figure 6.9 (couplages aux fermions et aux bosons de jauge) et 6.10 (autocouplages du boson de Higgs).

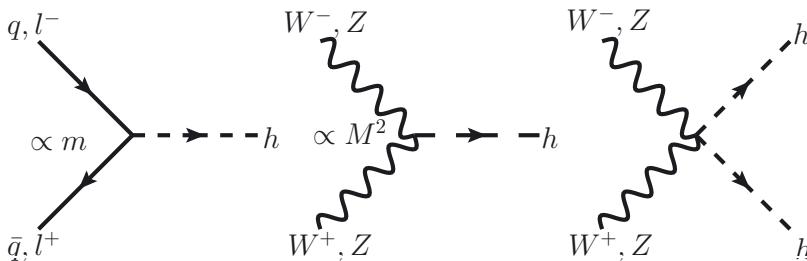


Figure 6.9 – Vertex de couplage entre boson de higgs et fermion massif (à gauche) et entre boson de Higgs et vecteurs faibles (au centre et à droite).

5 Renormalisation

5.1 Boucles virtuelles

Dans les termes d'ordre 2 et 3 du développement perturbatif de la matrice de diffusion figurent des diagrammes particuliers, qui sont des corrections aux éléments des diagrammes (vertex ou propagateur). Ces corrections radiatives sont données sur la figure 6.11.

À l'ordre 4, ces corrections apparaissent dans les diagrammes de diffusion $2 \rightarrow 2$ comme l'illustre la figure 6.12.

Tous ces diagrammes font intervenir des boucles de particules virtuelles qui correspondent à des fluctuations du vide. La conservation de l'énergie et de l'impulsion est imposée à chaque vertex mais ceci ne contraint en rien l'impulsion des deux particules dans la boucle. Le calcul de ce type de termes nécessite l'intégration sur toutes les impulsions possibles, ce qui donne un résultat infini. Ce n'est qu'en prenant en compte le calcul à tous les ordres que l'on aboutit à un résultat fini et donc physique. Pour réaliser un calcul, il faut se limiter à un ordre fini du développement et trouver un moyen de faire disparaître les infinis de la théorie : c'est la procédure de renormalisation.

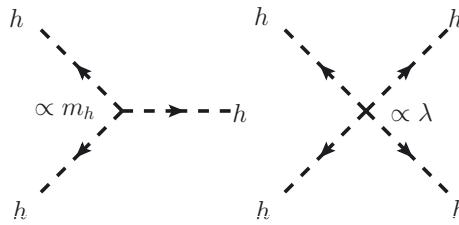


Figure 6.10 – Vertex d'autocouplage du boson de Higgs.

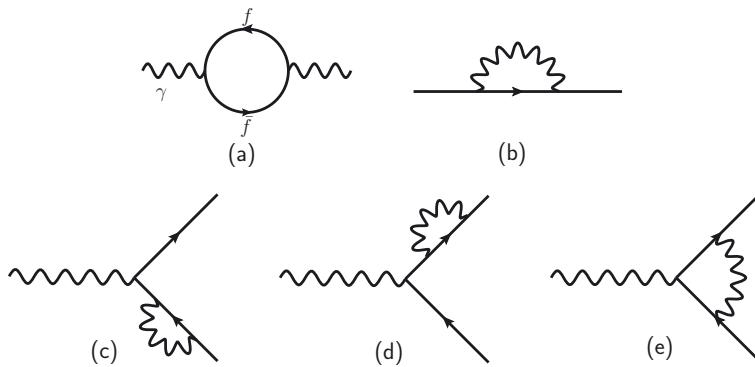
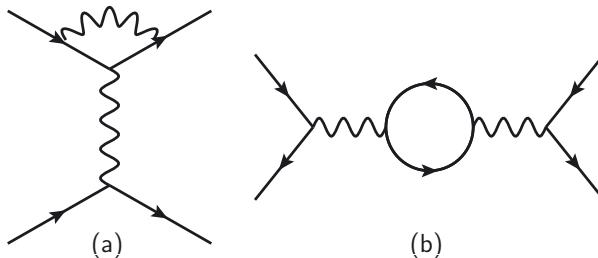


Figure 6.11 – Corrections radiatives aux propagateurs (a et b) et aux vertex (c, d et e).


 Figure 6.12 – Exemples de correction radiative au vertex (a) et au propagateur (b) dans un diagramme de diffusion $2 \rightarrow 2$.

5.2 Constantes mobiles

Pour un processus physique, on peut définir une échelle d'énergie caractéristique du processus, généralement donnée par le carré de l'impulsion du propagateur $\mu^2 = s$ ou t . À une échelle d'énergie donnée correspond une taille caractéristique. Plus μ est élevé, plus on sonde finement la matière. L'intégrale sur toutes les impulsions dans la boucle peut se découper en un terme de 0 à μ puis un second de μ à l'infini :

$$\mathcal{M}_{boucle} = \int_0^{+\infty} \dots dk = \int_0^\mu \dots dk + \int_\mu^{+\infty} \dots dk = \mathcal{M}_\mu + \mathcal{M}_\infty. \quad (6.52)$$

Considérons maintenant une charge nue. En terme de théorie des champs, cette charge polarise le vide autour d'elle, c'est-à-dire crée des paires virtuelles de particules et d'antiparticules. Une seconde charge située à une distance fixée ne « voit » pas la charge nue mais une charge écrantée par ces paires particules-antiparticules. Cet effet d'écrantage, illustré sur la figure 6.13, est d'autant plus grand que les deux charges sont éloignées.

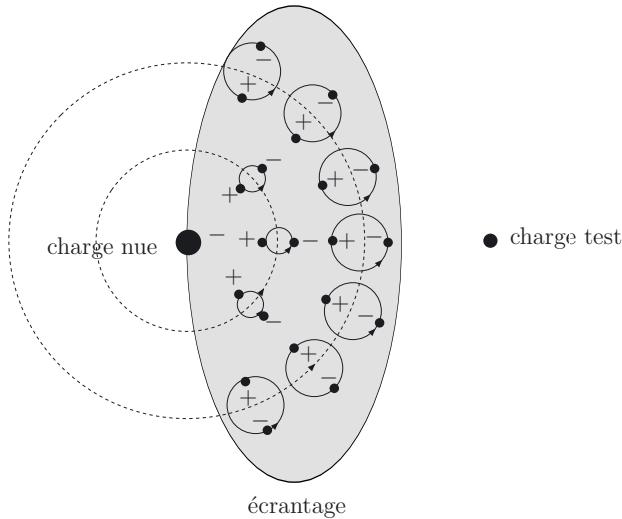


Figure 6.13 – Effets d'écrantage d'une charge nue par la polarisation du vide quantique.

À une distance donnée, c'est-à-dire à une échelle d'énergie μ donnée, l'écrantage est dû aux contributions des boucles d'énergie supérieure à μ , soit le terme \mathcal{M}_∞ . En partant d'une charge infinie à distance nulle (charge nue) on aboutit à une charge écrantée finie à une distance fixée. La charge effective, c'est-à-dire la constante de couplage de l'interaction, devient dépendante de la distance. Les termes infinis des fluctuations quantiques sont donc absorbés dans la constante de couplage qui dépend maintenant de l'échelle d'énergie du processus. C'est une constante de couplage mobile. Le calcul des boucles se réduit donc au calcul du terme \mathcal{M}_μ en considérant la valeur de la constante de couplage à l'échelle μ^2 . La théorie de la renormalisation permet de calculer l'évolution de la constante de couplage en fonction de l'échelle d'énergie :

$$\alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 + \frac{\alpha(\mu_0)\beta}{4\pi} \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}. \quad (6.53)$$

Il suffit de disposer d'une mesure à une échelle donnée μ_0 pour connaître la valeur du couplage à n'importe quelle énergie. Ceci est vérifié expérimentalement. Par exemple, pour l'électromagnétisme on a mesuré :

$$\alpha_{EM}(\mu = 0) \approx 1/137 \text{ et } \alpha_{EM}(\mu = M_Z) \approx 1/128, \quad (6.54)$$

ce qui est en accord avec les relations d'évolution d' α_{EM} . La constante de couplage à basse énergie donne la valeur de la charge électrique statique. Le facteur β dépend des

particules présentes dans la théorie et du groupe de jauge. Dans le cas de l'électromagnétisme, l'écrantage n'est dû qu'aux boucles de fermions car le photon n'est pas chargé. On montre alors que $\beta < 0$ et que la constante de couplage augmente avec l'énergie. Ce n'est plus le cas pour les interactions forte et faible où $\beta > 0$ car les bosons participent aussi aux boucles. Ces boucles bosoniques ont un effet d'anti-écrantage qui fait augmenter la constante de couplage à basse énergie. La figure 6.14 illustre l'évolution des constantes de couplage du modèle standard.

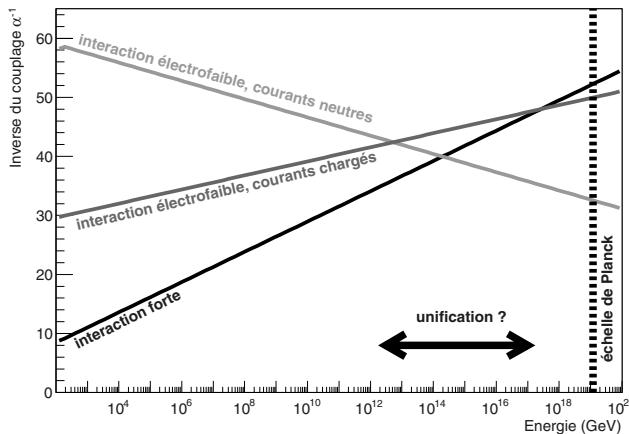


Figure 6.14 – Évolution des constantes de couplage avec l'échelle d'énergie pour les interactions forte (gluons), électrofaible par courants chargés (W^\pm) et électrofaible par courants neutres (Z, γ).

L'effet d'anti-écrantage explique le comportement singulier de l'interaction forte, qui sera discuté au chapitre 7. À basse énergie, la constante de couplage fort avoisine l'unité et il n'est plus possible de faire un développement perturbatif : tous les ordres sont importants. La description en terme de diagrammes de Feynman n'a plus de sens pour décrire l'interaction forte à basse énergie, en particulier les états liés (proton, neutron, pions,...). À courte distance l'interaction est bien moins forte, avec $\alpha_S(m_Z) = 0,118$. On peut alors décrire l'interaction en termes de diagrammes de Feynman. La transition entre les domaines perturbatif et non perturbatif de la théorie de jauge de l'interaction forte se situe autour de la centaine de MeV. Ainsi, il est possible de calculer les sections efficaces des processus réalisés dans les collisionneurs de hadrons (proton-proton ou proton-antiproton), tels le Tevatron ou le LHC.

Un comportement similaire pourrait être observé pour l'interaction faible si les bosons de jauge W et Z n'étaient pas massifs. La masse des bosons faibles limite la portée de l'interaction.

Les points clefs du chapitre

- 1 La diffusion de particules peut se décrire comme la transition d'un état initial libre longtemps avant l'interaction vers un état final libre longtemps après l'interaction.
- 2 La matrice de diffusion peut s'écrire comme un développement perturbatif en puissances de la constante de couplage. Si cette dernière est petite on peut faire des calculs précis en se limitant aux premiers ordres du développement perturbatif.
- 3 Les diagrammes de Feynman sont une représentation schématique de la matrice de diffusion à un ordre donné du développement perturbatif. Ils permettent de déduire l'expression de l'élément de matrice reliant état initial et état final par application des règles de Feynman. On retiendra particulièrement que chaque vertex fait apparaître la constante de couplage de l'interaction.
- 4 Les observables que sont les largeurs de désintégration (temps de vie) et les sections efficaces de diffusion sont directement reliés à la matrice de diffusion. Ces grandeurs font apparaître deux concepts : l'amplitude de Feynman qui décrit la dynamique du processus (y a-t-il une interaction qui permet de relier l'état initial à l'état final) et l'espace de phase qui caractérise la cinématique (le processus satisfait-il aux relations de conservation de l'énergie et de l'impulsion).
- 5 Les contributions d'ordre supérieur peuvent faire apparaître des intégrales divergentes (diagrammes à boucles). Ce problème se résout par une procédure complexe de renormalisation dont l'une des conséquences est la variation des constantes de couplage avec l'échelle d'énergie du processus.



Entraînez-vous

6.1 Diagrammes de Feynman

Donnez le ou les diagrammes de Feynman les **plus simples** (en indiquant si besoin les différentes charges) pour les processus suivants :

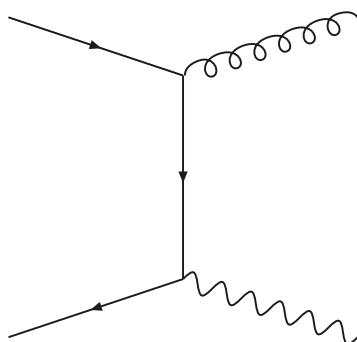
- a) $q\bar{q} \rightarrow e^+e^-$ (Drell-Yan)
- b) $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ (Diffusion Compton)
- c) $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$
- d) $qg \rightarrow Wq'g$
- e) $gg \rightarrow Wq\bar{q}'$
- f) $\mu^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$
- g) $b \rightarrow s\gamma$ (diagramme "pingouin")
- h) $h \rightarrow b\bar{b}$ (h = boson de Higgs)
- i) $h \rightarrow \gamma\gamma$

6.2 Processus $W+1$ parton

On s'intéresse au processus de production de bosons W^\pm dans un collisionneur hadronique.

- a) Complétez le diagramme Feynman suivant pour le processus $q\bar{q}' \rightarrow W^+g$ où q et q' représentent des quarks de saveurs différentes en indiquant :

- la nature de chaque particule (q , W ...),
- la charge électrique de chaque particule,
- la ou les charges de couleur de chaque particule (choisissez une configuration parmi les différentes possibilités).



- b) Quelles sont les interactions en jeu à chaque vertex ? À quelle grandeur chaque vertex est-il proportionnel ?
- c) Donnez les diagrammes de Feynman pour le processus $qg \rightarrow W^-q'$.
- d) Quelle est la dépendance de la section efficace de production en fonction des constantes de couplage des interactions électromagnétique (α_{EM}), forte (α_s) et faible (α_w) ?
- e) Les processus considérés ici sont de type $W+1$ parton. On pourrait considérer des processus $W+2$ partons, $W+3$ partons... Quel est l'ordre de grandeur du rapport des sections efficaces $\sigma_{W+n \text{ partons}} / \sigma_{W+1 \text{ parton}}$ en fonction de n ?

6.3 Désintégration du boson de Higgs

Le lagrangien d'interaction entre le champ de Higgs et une paire de fermions s'écrit :

$$\mathcal{L}(x) = -\lambda_f \bar{\psi}_f(x)(v + h(x))\psi_f(x). \quad (6.55)$$

La masse du boson de Higgs sera prise à 126 GeV.

- a) Expliquez chacun des termes apparaissant dans le lagrangien : x , λ_f , v , $h(x)$, ψ_f et $\bar{\psi}_f$.
- b) Montrez que le couplage entre le boson de Higgs et le fermion est proportionnel à la masse du fermion.
- c) Quels sont les modes de désintégration autorisés, à l'ordre le plus bas, du boson de Higgs ? Tracez les diagrammes de Feynman correspondants.
- d) En négligeant les effets cinématiques, calculez les rapports d'embranchement $h \rightarrow b\bar{b}$ et $h \rightarrow \tau^+\tau^-$. Commentez.

Introduction

L'interaction forte, du fait de la divergence à basse énergie de la constante de couplage, présente une phénoménologie particulière. Les quarks n'apparaissent que sous forme d'états liés, les hadrons. C'est l'étude et la classification des hadrons selon leurs propriétés (masse, spin, charge...) qui sont à l'origine du modèle des quarks et de la théorie moderne de l'interaction forte.

Objectifs

- Connaître les différents régimes perturbatifs et non perturbatifs de l'interaction forte.
- Définir les états liés de l'interaction forte et le modèle des quarks.
- Expliquer les propriétés de confinement et de liberté asymptotiques de l'interaction forte.

Plan

- Classification des hadrons
- Modèle des quarks
- Chromodynamique quantique

1 Classification des hadrons

1.1 Définition

Les années 1950 ont vu l'apparition des premiers accélérateurs de particules, les cyclotrons. En accélérant des protons et en les envoyant sur une cible fixe, d'hydrogène ou de deutérium liquide par exemple, on réalisait des collisions proton-proton ou proton-neutron avec des énergies dans le centre de masse de quelques centaines de keV. À ces énergies, le proton et le neutron peuvent être considérés comme des particules élémentaires, ce ne sera plus le cas à des énergies plus élevées (voir paragraphe 3.3). En mesurant la section efficace d'interaction en fonction de l'énergie dans le centre de masse de la collision, de nombreuses résonances sont observées et interprétées comme autant de nouvelles particules.

Ces états instables se désintègrent principalement par interaction forte et constituent les hadrons. L'étude des particules produites dans l'état final permet de déterminer la masse et le spin de ces hadrons. Les bosons (spin entier) sont appelés mésons et les fermions (spin demi-entier) sont les baryons.

La désintégration des mésons, en particulier les plus légers, peut donner lieu à des états finals sans hadron, tels $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ou $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$. En revanche, le nombre de baryons est conservé dans toutes les interactions, en particulier le baryon le plus léger est stable : c'est le proton. Pour traduire formellement cet effet on introduit un nouveau nombre quantique additif conservé, le nombre baryonique B , qui vaut :

- $B = 1$ pour les baryons.
- $B = -1$ pour les antibaryons (antiproton, antineutron). Aucun baryon ne peut être sa propre antiparticule : le neutron et l'antineutron, bien qu'ayant les mêmes charges apparentes, sont deux particules distinctes.
- $B = 0$ pour toutes les autres particules.

1.2 Symétrie d'isospin

Devant cette multitude de résonances, s'est posée la question de leur classification. On constate notamment que plusieurs particules présentent des invariants de Lorentz similaires (même spin, masses voisines) et ont le même comportement vis-à-vis de l'interaction forte. C'est le cas du proton et du neutron qui ont des masses similaires ($m_n = 939,6 \text{ MeV}$, $m_p = 938,3 \text{ MeV}$) et qui sont interchangeables dans les noyaux sans modifier significativement les propriétés nucléaires. On peut alors considérer ces particules comme différents états d'un même objet, du point de vue de l'interaction forte, les interactions électromagnétiques levant la dégénérescence entre les états. Neutron et proton sont alors les deux états du nucléon. Similairement, les trois mésons légers appelés pions, π^+, π^0, π^- , sont trois états d'un unique objet. On construit ainsi des multiplets de particules.

En mécanique quantique, un électron de spin $J = \frac{1}{2}$ peut exister dans deux états de spin : $J_3 = \pm \frac{1}{2}$, qui interagissent de manière identique en électromagnétisme. On introduit alors une analogie avec le spin pour classifier les hadrons : l'isospin ou spin isotopique. Le nucléon est un objet d'isospin $I = \frac{1}{2}$ avec deux états : le neutron correspondant à la projection $I_3 = -\frac{1}{2}$ et le proton à $I_3 = \frac{1}{2}$. En notant les états, $|I, I_3\rangle_{\text{multiplet}}$, on a :

$$|n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_N, \quad |p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_N. \quad (7.1)$$

De même, les trois pions forment un triplet d'isospin $I = 1$:

$$|\pi^-\rangle = |1, -1\rangle_\pi, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle_\pi, \quad |\pi^+\rangle = |1, 1\rangle_\pi. \quad (7.2)$$

À l'isospin I correspond un multiplet de $2I + 1$ états avec une composante I_3 variant de $-I$ à $+I$. La répartition des charges dans un multiplet n'est pas aléatoire : elle est imposée par la conservation de I_3 et de la charge électrique Q . Pour les nucléons $I_3 = Q - \frac{1}{2}$, alors que pour les pions $I_3 = Q$. On concilie ces deux relations en introduisant

le troisième nombre quantique additif, le nombre baryonique, pour obtenir la formule de Gell-Mann Nishijima :

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}. \quad (7.3)$$

Les particules d'un même multiplet ayant des propriétés identiques pour l'interaction forte, l'interaction conserve l'isospin et le hamiltonien ne doit pas dépendre de I_3 . La symétrie d'isospin peut être utilisée pour prédire des rapports de sections efficaces. Cependant, cette symétrie n'est pas une symétrie exacte de la nature puisque les masses des particules d'un multiplet ne sont pas rigoureusement identiques.

1.3 Exemple de conservation de l'isospin

Le noyau de deutérium ou deuton peut être produit en association avec un pion par collisions de deux nucléons, $pp \rightarrow \pi^+ d$ ou $pn \rightarrow \pi^0 d$. La symétrie d'isospin permet de déterminer le rapport des sections efficaces de ces deux processus :

$$R = \frac{\sigma_{pp \rightarrow \pi^+ d}}{\sigma_{np \rightarrow \pi^0 d}}. \quad (7.4)$$

L'isospin I et sa projection I_3 doivent être conservés entre l'état initial et l'état final. De plus, le hamiltonien, et donc la matrice de diffusion, ne dépend pas de I_3 . La probabilité de transition entre deux états propres d'isospin $|I, I_3\rangle_i$ et $|I', I'_3\rangle_f$ est :

$$\left| \langle I, I_3 | S | I', I'_3 \rangle \right|^2 = \left| S_{I,i \rightarrow f} \langle I, I_3 | I', I'_3 \rangle \right|^2 = \left| S_{I,i \rightarrow f} \right|^2 \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3}, \quad (7.5)$$

où $\left| S_{I,i \rightarrow f} \right|^2$ est la probabilité de transition de l'état initial i vers l'état final f qui ne dépend que de l'isospin des états. La section efficace est proportionnelle à $\left| \langle I, I_3 | S | I', I'_3 \rangle \right|^2$, soit $\sigma = \alpha_{i \rightarrow f} \left| \langle I, I_3 | S | I', I'_3 \rangle \right|^2 = \sigma_{I,i \rightarrow f} \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3}$.

L'isospin étant construit comme le spin, les règles de combinaisons de deux isospins sont les mêmes. Pour l'état initial, le système de deux nucléons $|NN\rangle$ est la combinaison de deux isospins $\frac{1}{2}$, donc soit un isospin 1, soit un isospin 0. La projection d'isospin I_3 du système de deux protons est $I_3 = 1$, ce qui n'est possible que pour l'état $|1, 1\rangle_{NN}$. En revanche le système proton-neutron correspond à $I_3 = 0$ qui est présent dans le triplet (état $|1, 0\rangle$) et le singlet (état $|0, 0\rangle$) ; l'état initial proton-neutron est une combinaison symétrique de ces deux états, soit :

$$|pp\rangle = |1, 1\rangle_{NN}, \quad |np\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle_{NN} + |0, 1\rangle_{NN}). \quad (7.6)$$

Le deuton est un singlet d'isospin ($I = 0, I_3 = 0$) ; le système deuton-pion a le même isospin que le pion, soit :

$$|\pi^0 d\rangle = |1, 0\rangle_{\pi d}, \quad |\pi^+ d\rangle = |1, 1\rangle_{\pi d}. \quad (7.7)$$

Les sections efficaces de diffusion sont alors :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{pp \rightarrow \pi^+ d} &= \alpha_{NN \rightarrow \pi d} \left| \langle pp | S | \pi^+ d \rangle \right|^2 \\
 &= \alpha_{NN \rightarrow \pi d} \left| \langle NN \langle 1, 1 | 1, 1 \rangle_{\pi d} \rangle \right|^2 \\
 &= \sigma_{1, NN \rightarrow \pi d}, \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{np \rightarrow \pi^0 d} &= \alpha_{NN \rightarrow \pi d} \left| \langle np | S | \pi^0 d \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \alpha_{NN \rightarrow \pi d} \left| \underbrace{\langle NN \langle 1, 0 | S | 1, 0 \rangle_{\pi d} \rangle}_{=S_{1, NN \rightarrow \pi d}} + \underbrace{\langle NN \langle 0, 0 | S | 1, 0 \rangle_{\pi d} \rangle}_{=0} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sigma_{1, NN \rightarrow \pi d}. \tag{7.9}
 \end{aligned}$$

Le rapport des sections efficaces doit donc être $R = 2$. Cette prédition est vérifiée expérimentalement avec une assez bonne précision.

1.4 Étrangeté

Les résonances hadroniques se désintègrent par interaction forte avec des durées de vie de $10^{-23} \sim 10^{-24}$ s. Les seuls hadrons à vie longue sont les plus légers qui sont stables pour l'interaction forte, mais peuvent se désintégrer par interaction faible (neutron avec $\tau_n \sim 15$ min, pion chargé avec $\tau_{\pi^\pm} \sim 10^{-8}$ s) ou électromagnétique (pion neutre, $\tau_{\pi^0} \sim 10^{-16}$ s).

Néanmoins certains multiplets observés n'entrent pas dans cette classification. Ces multiplets étranges ont des masses élevées et des temps de vie relativement longs, indiquant qu'ils sont stables pour l'interaction forte. De plus, ils ne vérifient pas la formule de Gell-Mann Nishijima. Ce sont, par exemple pour les bayons, le singlet Λ^0 , le doublet Ξ^-, Ξ^0 et le triplet $\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$, dont les caractéristiques sont regroupées dans le tableau 7.1.

Tableau 7.1– Propriétés des baryons étranges.

Nom	Masse	Spin	Temps de vie	Désintégration
Λ^0	1 116 MeV	$\frac{1}{2}$	10^{-10} s	$\Lambda \rightarrow n\pi^0, p\pi^-$
Σ^+	1 189 MeV	$\frac{1}{2}$	10^{-10} s	$\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+, p\pi^0$
Σ^0	1 192 MeV	$\frac{1}{2}$	10^{-20} s	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma$
Σ^-	1 197 MeV	$\frac{1}{2}$	10^{-10} s	$\Sigma^- \rightarrow n\pi^-$
Ξ^0	1 325 MeV	$\frac{1}{2}$	3×10^{-10} s	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0$
Ξ^-	1 321 MeV	$\frac{1}{2}$	3×10^{-10} s	$\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 \pi^-$

Pour expliquer ce comportement, la première solution proposée fut, encore une fois, d'ajouter un nombre quantique conservé par l'interaction forte : l'étrangeté. On pose $S = 0$ pour le nucléon et les pions. Le Λ et les Σ^\pm se désintègrent par interaction faible en nucléons et on leur assigne par convention une étrangeté $S = -1$. Les Ξ se désintègrent toujours par interaction faible en Λ , d'où une étrangeté $S = -2$. Enfin la désintégration électromagnétique $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 \gamma$ conserve l'étrangeté, ce qui semble indiquer que ce nombre quantique est également conservé par l'interaction électromagnétique. La formule de Gell-Mann Nishijima s'adapte en ajoutant l'étrangeté :

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (7.10)$$

où Y est l'**hypercharge**.

La symétrie d'isospin, construite par analogie avec le spin, repose sur la structure du groupe $SU(2)$. On montre que l'extension à l'étrangeté correspond au groupe $SU(3)$, qui prédit des multiplets plus grands, obtenus en réunissant plusieurs multiplets $SU(2)$ d'hypercharge différente. Ainsi, les nucléons, le Λ , les Σ et Ξ forment un octet de particules, toutes de spin $J = \frac{1}{2}$, représenté sur la figure 7.1a. De même il existe un décuplet de baryons de spin $J = \frac{3}{2}$ (figure 7.1b) et plusieurs octets de mésons.

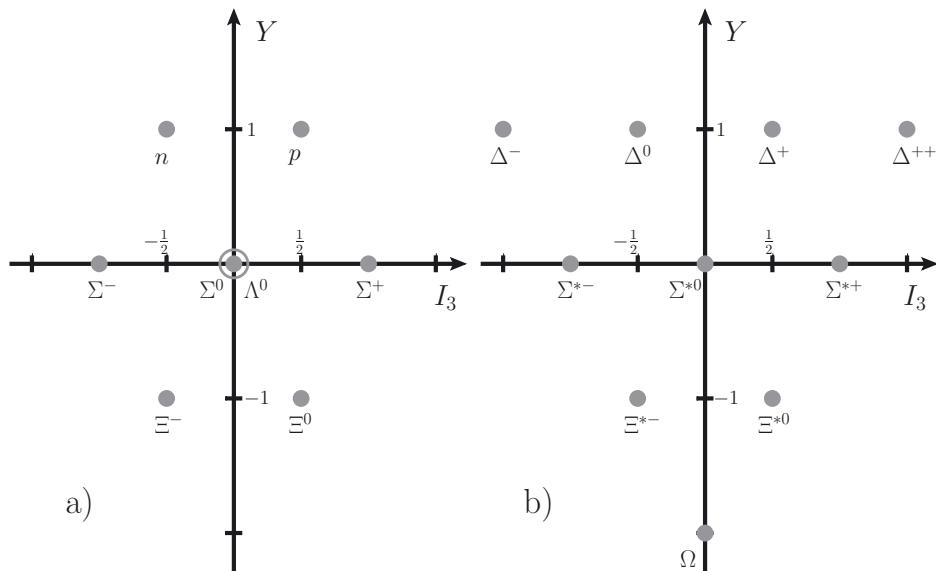


Figure 7.1– Multiplets de hadrons représentés dans le plan I_3, Y (isospin et hypercharge), chaque ligne correspondant à un multiplet d'isospin : a) octet de spin $\frac{1}{2}$; b)

décuplet de spin $\frac{3}{2}$.

1.5 Formule de masse de Gell-Mann Okubo

Tout comme la symétrie d'isospin, la symétrie $SU(3)$ suppose que les particules d'un même multiplet (octet ou décuplet) sont différents états d'un même objet. La symétrie d'isospin n'est pas une symétrie exacte, mais est une très bonne approximation. En revanche, la symétrie $SU(3)$ est clairement brisée, du fait des masses sensiblement différentes des hadrons d'un même multiplet. On peut néanmoins l'utiliser pour déterminer des relations entre les masses des différentes particules d'un multiplet. Chaque état sera identifié par trois nombres : l'isospin, la projection d'une composante de l'isospin (comme dans un multiplet d'isospin) et l'hypercharge : $|I, I_3, Y\rangle$.

La masse est la valeur moyenne du hamiltonien (énergie) du système au repos : $m = \langle \mathcal{H} \rangle$. Ce hamiltonien peut se décomposer en deux termes : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_B$. Le premier, \mathcal{H}_S , préserve la symétrie $SU(3)$ et a la même valeur moyenne pour tous les états d'un multiplet. Le second, \mathcal{H}_B , viole cette symétrie mais conserve, en première approximation, la symétrie d'isospin. En supposant ce terme faible, $\langle \mathcal{H}_B \rangle \ll \langle \mathcal{H}_S \rangle$, on peut utiliser la théorie des perturbations et la masse d'une particule d'un multiplet devient :

$$\begin{aligned} m &= \langle I, I_3, Y | \mathcal{H}_S | I, I_3, Y \rangle + \langle I, I_3, Y | \mathcal{H}_B | I, I_3, Y \rangle \\ &= m_0 + \langle I, I_3, Y | \mathcal{H}_B | I, I_3, Y \rangle, \end{aligned} \quad (7.11)$$

où m_0 est la masse de base du multiplet.

Le hamiltonien \mathcal{H}_B brise la symétrie $SU(3)$ mais conserve la symétrie d'isospin. Il ne peut ainsi dépendre que de Y et pas de I_3 . La relation la plus simple sera de la forme $\mathcal{H}_B = aY$. On en déduit les relations suivantes entre les masses des particules du décuplet :

$$m_{\Omega^-} - m_{\Xi^*} = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_{\Delta} = a. \quad (7.12)$$

L'application numérique, en se limitant aux particules de même charge pour limiter les effets électromagnétiques, donne :

- $m_{\Omega^-} - m_{\Xi^*} = 137,5 \pm 0,9$ MeV,
- $m_{\Xi^{*-}} - m_{\Sigma^{*-}} = 147,8 \pm 1,1$ MeV,
- $m_{\Sigma^{*-}} - m_{\Delta^-} = 155,0 \pm 1,0$ MeV.

Compte tenu des approximations utilisées pour dériver le résultat, la formule de masse est vérifiée expérimentalement. Elle permit d'ailleurs de prédire la masse du Ω^- avant sa découverte expérimentale.

Pour l'octet, cette formule ne fonctionne plus, car $|\Sigma^0\rangle = |1, 0, 1\rangle$ et $|\Lambda^0\rangle = |0, 0, 1\rangle$ ont la même hypercharge mais des masses très différentes : $(m_{\Sigma^0} - m_{\Lambda^0}) \approx 76$ MeV. Il faut alors ajouter des termes quadratiques dans l'expression de hamiltonien \mathcal{H}_B . Le terme le plus simple sera proportionnel à Y^2 . Pour le second terme, il faut revenir à l'analogie de structure entre spin et isospin. Pour le spin il existe un opérateur quadratique qui commute avec J_3 , l'opérateur J^2 avec comme valeur propre $J(J+1)$. De même pour

l'isospin : si \mathcal{H}_B ne dépend pas de I_3 , cela signifie que les opérateurs \mathcal{H}_S et I_3 commutent. Ainsi la valeur propre $I(I + 1)$ sera un nombre quantique pertinent. On pose alors :

$$\mathcal{H}_B = aY + bY^2 + cI(I + 1) \text{ et } m = m_0 + aY + bY^2 + cI(I + 1). \quad (7.13)$$

Néanmoins, le hamiltonien linéaire semble suffisant pour décrire le décuplet et on souhaite le conserver pour ces particules :

$$\begin{aligned} m &= m_0 + aY + bY^2 + cI(I + 1) = m'_0 + ey \\ \Rightarrow cI(I + 1) + bY^2 &= \delta m + fY, \quad f = b - e. \end{aligned} \quad (7.14)$$

En considérant les particules du décuplet :

$$\begin{aligned} \Delta &: I = \frac{3}{2}, \quad Y = 1 \quad \rightarrow \quad b + \frac{15}{4}c = \delta m + f, \\ \Sigma &: I = 1, \quad Y = 0 \quad \rightarrow \quad 2c = \delta m, \\ \Xi &: I = \frac{1}{2}, \quad Y = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{4}c = \delta m - f, \\ \Omega &: I = 0, \quad Y = -2 \quad \rightarrow \quad 4b = \delta m - 2f. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Ces relations ne sont toutes satisfaites que si $c = -4b$. Finalement, on obtient la formule de masse de Gell-Mann Okubo, valide pour l'octet et le décuplet :

$$m = m_0 + aY + b(4I(I + 1) - Y^2). \quad (7.16)$$

En appliquant cette formule de masse aux différents états de l'octet :

$$\begin{aligned} \text{Nucléon} &: I = \frac{1}{2}, \quad Y = 1 \quad \rightarrow \quad m_N = m_0 + a + 2b, \\ \Sigma &: I = 1, \quad Y = 0 \quad \rightarrow \quad m_\Sigma = m_0 + 8b, \\ \Xi &: I = \frac{1}{2}, \quad Y = -1 \quad \rightarrow \quad m_\Xi = m_0 - a + 2b, \\ \Lambda &: I = 0, \quad Y = 0 \quad \rightarrow \quad m_\Lambda = m_0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

On en déduit la relation suivante entre les masses de différents baryons :

$$2(m_N + m_\Xi) = 3m_\Lambda + m_\Sigma. \quad (7.18)$$

L'application numérique pour les particules neutres donne :

$$\begin{aligned} 2(m_n + m_\Xi^0) &= 2 \times (939,6 + 1314,9) = 4509,0 \pm 0,4 \text{ MeV}, \\ 3m_\Lambda + m_\Sigma^0 &= 3 \times 1115,7 + 1192,6 = 4539,7 \pm 0,1 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Une fois encore, la relation est vérifiée de façon satisfaisante. Une relation similaire peut être dérivée pour les mésons et sera discutée dans l'exercice 7.2.

La classification des hadrons en multiplets, reposant sur les groupes $SU(2)$ (isospin) et $SU(3)$ (isospin et hypercharge) permet de construire un modèle prédictif des hadrons. Cependant ce modèle est loin d'être entièrement satisfaisant. D'une part il nécessite l'introduction de différents nombres quantiques *ad hoc* (isospin, hypercharge), qui ne sont pas justifiés par le modèle. D'autre part, ces symétries ne sont visiblement pas

des symétries exactes : elles ne sont respectées ni par les interactions électrofaibles qui lèvent la dégénérescence entre les états, ni même par l'interaction forte qui les viole faiblement. Ceci est dû à la nature composite des hadrons et à la masse intrinsèque des différents quarks.

2

Modèle des quarks

2.1 États composites et isospin

La grande multiplicité de hadrons observés ainsi que la complexité de leur classification semble indiquer une sous-structure. En 1964, Murray Gell-Mann (prix Nobel de physique 1969) a proposé que les hadrons soient un état lié de particules plus élémentaires, les quarks. À partir de trois quarks (on parle de trois saveurs), on peut décrire la totalité des états hadroniques légers.

L'interaction forte n'est pas sensible à la saveur de quarks. De même, elle ne peut modifier cette saveur. Afin de reproduire les symétries observées, deux quarks doivent former un doublet d'isospin ($I = \frac{1}{2}$) : ce sont les quarks up ($I_3 = \frac{1}{2}$) et down ($I_3 = -\frac{1}{2}$). La symétrie d'isospin étant très bien (mais pas parfaitement) vérifiée, ces deux quarks doivent avoir sensiblement la même masse. Le troisième quark forme un singlet d'isospin ($I = 0$) : c'est le quark étrange. Comme l'interaction forte ne modifie pas la saveur des quarks, le nombre quantique conservé d'étrangeté correspond simplement au nombre de quarks étranges. On a vu que la symétrie $SU(3)$ était brisée et que les particules étranges étaient plus massives. Ce quark s doit ainsi être plus massif que les quarks u et d . Les écarts de masses observés dans le décuplet (équation (7.12)), entre particules qui diffèrent d'une unité d'étrangeté (et donc d'un quark étrange), permettent de déduire un ordre de grandeur de la masse de ce quark $m_s \sim 140$ MeV.

Les baryons : Les règles de combinaison du spin montrent qu'un système de plusieurs bosons (spin entier) est toujours un boson. Une partie des hadrons étant des fermions, les quarks sont nécessairement des fermions. Par analogie avec les leptons, on leur attribue un spin $J = \frac{1}{2}$.

Pour obtenir des états liés fermioniques, il faut assembler trois quarks. Les antibaryons (antiproton, antineutron) sont alors des états liés de trois antiquarks.

En ne considérant que les deux quarks u et d , chaque baryon est composé de trois quarks de spin $\frac{1}{2}$ et d'isospin $\frac{1}{2}$. *A priori* cela peut conduire à quatre combinaisons : deux doublets d'isospin ($I = \frac{1}{2}$), l'un de spin $J = \frac{1}{2}$, l'autre de spin $J = \frac{3}{2}$ et deux quadruplets d'isospin ($I = \frac{3}{2}$), de spin $J = \frac{1}{2}$ et $J = \frac{3}{2}$ respectivement. Cependant, on montre que spin et isospin doivent être égaux pour assurer l'antisymétrie de la fonction

d'onde des fermions. Le doublet, de spin $\frac{1}{2}$, correspond au nucléon. Leur composition en quarks est alors :

$$I_3 : \begin{array}{ccccccccc} n & \equiv & u & d & d & p & \equiv & u & u & d \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \equiv & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \text{ et } I_3 : \begin{array}{ccccccccc} p & \equiv & u & u & d \\ \frac{1}{2} & \equiv & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}. \quad (7.19)$$

On en déduit la charge électrique des deux quarks :

$$\begin{cases} q_n = 0 & = 2q_d + q_u \\ q_p = 1 & = q_d + 2q_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_u = \frac{2}{3} \\ q_d = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (7.20)$$

et leur nombre baryonique :

$$\begin{cases} B_n = 1 & = 2B_d + B_u \\ B_p = 1 & = B_d + 2B_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_u = \frac{1}{3} \\ B_d = \frac{1}{3} \end{cases}. \quad (7.21)$$

Le nombre baryonique est le même pour chacun des deux quarks, et par extension le même pour tous les quarks, afin que tous les états liés de trois quarks aient un nombre baryonique égal à l'unité.

Le quadruplet, de spin $\frac{3}{2}$ est composé des quatre résonances Δ dont les compositions en quarks sont logiquement :

$$\Delta^- = ddd, \quad \Delta^0 = udd, \quad \Delta^+ = uud, \quad \Delta^{++} = uuu. \quad (7.22)$$

En ajoutant le quark étrange à partir du doublet de nucléons, on construit l'octet de spin $\frac{1}{2}$ ($\Lambda, \Sigma^{-,0,+}, \Xi^{-,0}$) et à partir des Δ , le décuplet de spin $\frac{3}{2}$. La composition en quarks des ces multiplets est donnée sur la figure 7.2. On en déduit que la charge électrique du quark s vaut $-\frac{1}{3}$.

Le dernier état du décuplet, le baryon Ω , n'a été mis en évidence expérimentalement que quelques mois après la publication du modèle des quarks. Cette découverte a permis de confirmer la validité du modèle. De plus, la formule de masse avait permis de prédire la masse de ce baryon avec une bonne précision.

Les mésons : Ce sont des bosons, ils doivent donc être composés, au minimum, de deux quarks. Le nombre baryonique est nul pour les mésons, or certains mésons sont antiparticules l'un de l'autre (π^+ et π^-) ou leur propre antiparticule (π^0). Pour satisfaire ces propriétés, un méson doit être un état lié quark-antiquark.

En utilisant le même raisonnement que pour les baryons, en combinant deux isospins $\frac{1}{2}$ et deux spins $\frac{1}{2}$, il existe quatre combinaisons, qui sont toutes réalisées dans la nature :

- un singlet (isospin nul) scalaire (spin nul) : le méson η ,
- un triplet ($I = 1$) scalaire : les pions $\pi^{-,0,+}$,

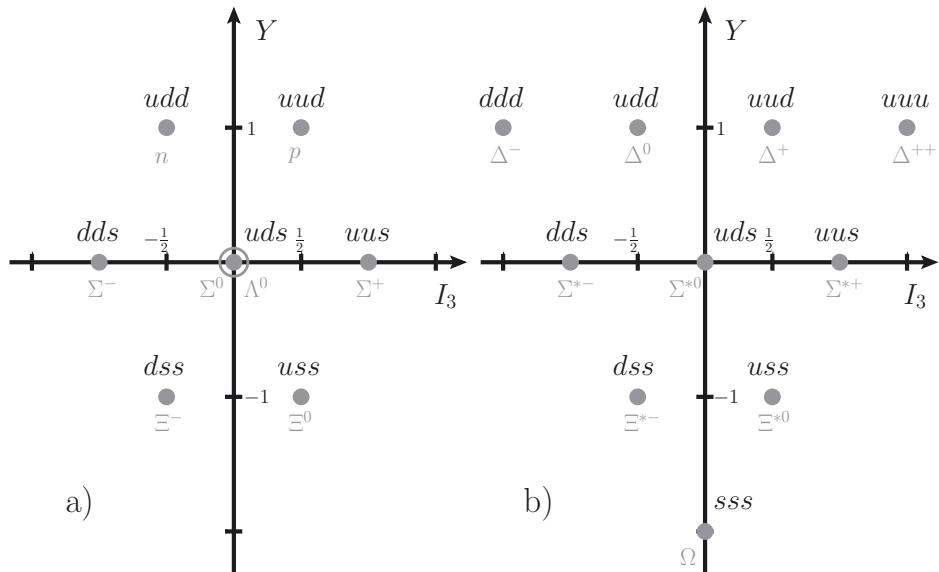


Figure 7.2 – Multiplets des baryons, avec compositions en quarks : a) octet de spin $\frac{1}{2}$; b) décuplet de spin $\frac{3}{2}$.

- un singlet vecteur ($J = 1$) : le méson ω ,
- un triplet vecteur : les mésons $\rho^{-,0,+}$.

L'ajout du quark étrange étend les deux triplets en deux octets donnés sur la figure 7.3.

Il faut également noter que plusieurs particules de masse et parfois de spin différents ont la même composition hadronique. L'équivalent existe en physique nucléaire où les états excités d'un noyau correspondent à différentes énergies de liaison et différentes configurations de spin des nucléons constituants. On parle de particules différentes alors que l'on devrait simplement parler d'états excités de systèmes de trois quarks (baryons : uud, uds, \dots) ou quark-antiquark (mésons : $u\bar{d}, u\bar{s}, \dots$) La raison de cette différence d'appellation est principalement historique. En physique nucléaire l'énergie de liaison ne représente que quelques pourcents de la masse du noyau. En revanche, la masse des hadrons provient essentiellement de l'énergie de liaison. Sans connaissance de la sous-structure en quarks, ces états excités de masses très différentes, apparaissent comme des particules différentes. Par exemple, la désintégration $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda\gamma$ n'est qu'une désexcitation γ du premier état excité vers le fondamental du système uds .

La symétrie d'isospin, concerne ici l'interaction forte. Il existe un autre isospin, l'isospin faible qui correspond à la charge faible. Dans le cadre d'une théorie de jauge, les particules sont également regroupées en multiplets : l'interaction de jauge permet de transformer les particules à l'intérieur d'un multiplet ; les autres interactions le laissent invariant. Pour décrire l'interaction faible, on a également recours à des doublets d'isospin (faible). Les bosons W^\pm transforment le quark u en d et réciproquement, alors

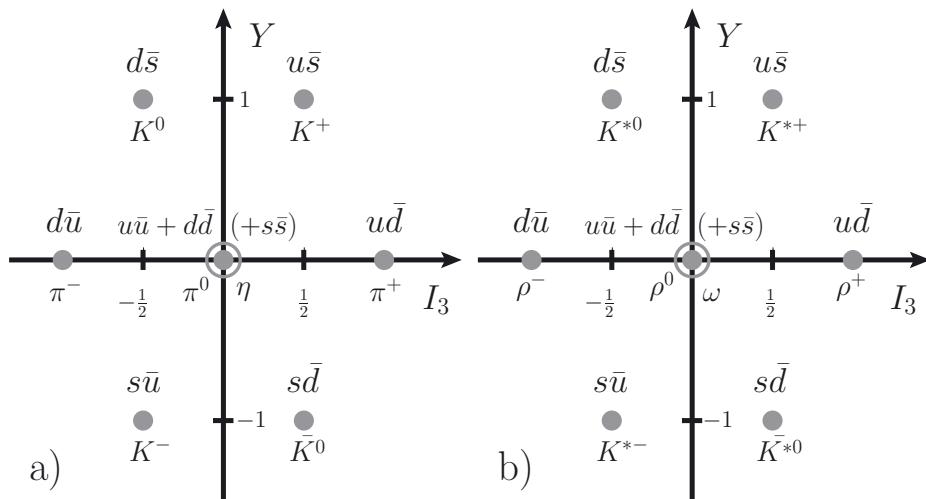


Figure 7.3 – Multiplets des mésons, avec composition en quarks : a) octet scalaire ($J = 0$) ; b) octet vectoriel ($J = 1$).

que l’interaction forte ne différencie pas entre les états du doublet. C’est cette dernière propriété qui a conduit à introduire l’isospin fort. Les deux concepts, dans le cas du doublet $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, sont ainsi équivalents.

2.2 Quarks lourds

Trois autres quarks, ont été postulés puis découverts par la suite. Certaines considérations sur l’interaction faible montrent que les quarks doivent exister en doublets composés d’un quark de charge $\frac{2}{3}$ et d’un quark de charge $-\frac{1}{3}$ comme c’est le cas pour le couple (u, d) . En conséquence, on postule l’existence d’un quatrième quark de charge $\frac{2}{3}$, le quark charmé c formant un doublet (c, s) . L’ajout de ce quatrième quark, connu sous le nom de mécanisme GIM¹, permet d’expliquer l’existence de couplage par courants chargés entre le quark u et le quark s , responsable de la désintégration des hypérons, sans introduire de désintégration par courants neutres (via un boson Z) qui n’a jamais été observée expérimentalement. De même, d’autres propriétés expérimentales de l’interaction faible ne peuvent s’expliquer que s’il existe au moins trois doublets de quarks. Ce troisième doublet se compose du quark bottom (ou quark beau) b de charge $-\frac{1}{3}$ et du quark top t de charge $\frac{2}{3}$.

Le mécanisme GIM fut proposé en 1970 et le quark c fut découvert expérimentalement en 1974 via une résonances dans la section efficace de diffusion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. La section efficace augmente fortement pour une énergie dans le centre de masse de

1. pour Glashow, Illiopoulos et Maiani, les trois physiciens qui ont proposé ce modèle

3097 GeV, correspondant au passage par un état intermédiaire $e^+e^- \rightarrow c\bar{c} \rightarrow \mu^+\mu^-$. Ce nouveau hadron $c\bar{c}$ porte le nom de J/ψ . Samuel Ting et Burton Richter obtinrent le prix Nobel en 1976 pour cette découverte. De la même manière, le quark b fut identifié en 1977, via la production d'un état lié $b\bar{b}$ de masse 9460 GeV, découverte qui rapporta le prix Nobel à Leon Lederman en 1981. Contrairement aux hadrons plus légers, la masse de ces hadrons lourds est dominée par la masse des quarks et non par l'énergie de liaison. On peut en déduire un ordre de grandeur pour les masses :

$$m_c \approx 1,5 \text{ GeV}, \quad m_b \approx 4,7 \text{ GeV}, \quad (7.23)$$

De multiples mésons ($D^0 = u\bar{c}$, $D^- = d\bar{c}$, $B^0 = d\bar{b}$, $B^+ = u\bar{b}$...) et baryons ($\Lambda_c^+ = udc$, $\Lambda_b^0 = udb$...) contenant un ou plusieurs quarks lourds ont également été observés.

Le sixième et dernier quark, le top, est sensiblement plus massif que les cinq autres. Il n'a été découvert qu'en 1994 et sa masse vaut : $m_t = 173,5 \pm 1$ GeV. La désintégration du quark top, comme pour tous les autres quarks se fait par interaction faible, $t \rightarrow W^+b$, avec la différence notable que $m_t > m_W + m_b$. C'est le seul quark dont la désintégration est cinématiquement favorisée car la boson W est réel. De ce fait, la durée de vie du top est extrêmement courte, de l'ordre de 10^{-25} s. Il n'a pas le temps de former d'états liés avant de se désintégrer et il n'existe aucun hadron contenant un quark top.

3 Chromodynamique quantique

3.1 Charge de couleur et constante de couplage fort

Le décuplet de baryons pose un nouveau problème : les trois hadrons $\Delta^- \equiv ddd$, $\Delta^{++} \equiv uuu$ et $\Omega^- \equiv sss$ sont composés d'un unique type de quark. De plus, ce sont des particules de spin $J = \frac{3}{2}$ qui peuvent se trouver dans l'état de polarisation $J_3 = \frac{3}{2}$. Ceci n'est possible que si les trois quarks, de spin $J = \frac{1}{2}$, sont tous dans l'état de polarisation

$J_3 = \frac{1}{2}$. On a alors trois fermions qui ont tous exactement les mêmes nombres quantiques, ce qui est rigoureusement interdit par le principe d'exclusion de Pauli. Il doit alors exister un nombre quantique supplémentaire qui différencie ces trois quarks : c'est la charge de couleur, qui est différente pour chacun des trois objets. Par convention ces trois charges sont nommées rouge (r), verte (v) et bleue (b). C'est la charge de couleur qui est la véritable charge de l'interaction forte.

La théorie de jauge de l'interaction forte, basée sur le groupe $SU(3)$, introduit dans le modèle une constante de couplage aux fermions colorés. Cette constante de couplage, g_s ou $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$, a été précisément mesurée à la masse du Z : $\alpha_s(m_Z) \approx 0,118$. En chromodynamique quantique, le facteur β qui contrôle l'évolution de la constante de couplage avec l'énergie (voir équation (6.53)) vaut $\beta = -\frac{2}{3}N_f + 11$ où N_f est le nombre

de quarks de masse inférieure à l'échelle d'énergie considérée. Ce facteur est toujours positif et la constante de couplage diminue quand l'énergie augmente. Il en résulte une phénoménologie particulière de l'interaction forte. L'énergie typique à partir de laquelle la théorie n'est plus perturbative est de l'ordre de 200 MeV (voir exercice 7.3). Cette échelle d'énergie correspond à la taille du proton (~ 1 fm).

3.2 Phénoménologie à basse énergie

À basse énergie, la constante de couplage devient grande ($\alpha_s \sim 1$) et l'approche perturbative n'est plus pertinente (en particulier l'équation (6.53) n'est plus valide). L'intensité de l'interaction forte diverge à faible énergie. En conséquence, une charge colorée ne peut exister seule : une telle charge apparaîtrait infinie à longue distance. Seuls des états globalement neutres peuvent exister à basse énergie : ce sont les hadrons, composés soit de trois quarks de couleurs différentes (baryons), soit d'un quark et d'un antiquark de même couleur/anticouleur (mésons). C'est le phénomène de confinement. De ce fait, la masse d'un quark, qui caractérise sa propagation libre, n'est pas mesurable car un quark n'est jamais libre. Ce confinement est également responsable de la courte portée effective des interactions fortes, bien que les gluons soient des particules de masse nulle, comme le photon.

En conséquence de la divergence du couplage fort, il est impossible de produire expérimentalement des quarks libres dans des collisions de particules. À basse énergie, en régime non perturbatif, une particule colorée peut céder une partie de son énergie cinétique pour rendre réelles des paires quark-antiquark virtuelles dans les fluctuations quantiques du vide pour produire un ou plusieurs hadrons : c'est le processus d'hadronisation. À plus haute énergie, un quark ou un gluon de grande impulsion va d'abord rayonner des gluons dans sa direction de propagation, qui vont se matérialiser en paires quark-antiquark qui vont eux-mêmes rayonner des gluons. Ce processus, dit de *showering*, peut se décrire perturbativement. Au fur et à mesure que l'énergie des particules créées diminue, on sort du régime perturbatif et les particules colorées s'hadronisent. Les partons (quark ou gluon) vont s'habiller pour former des états hadroniques excités et très instables dont les désintégrations successives donnent naissance à une grande multiplicité de hadrons qui se partagent la quadri-impulsion du parton initial. Expérimentalement, on peut détecter une collection de particules issues du showering et de l'hadronisation du quark ou du gluon initial allant toutes approximativement dans la même direction, formant **un jet** hadronique. Les étapes de la formation d'un jet sont illustrées sur la figure 7.4. Un jet est la signature expérimentale de la production d'un quark ou d'un gluon de haute énergie. En particulier, c'est l'observation d'événements à trois jets dans des collisions e^+e^- qui a permis de mettre en évidence l'existence du gluon ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$, le gluon étant rayonné par l'un des quarks). L'hadronisation est un processus non perturbatif et il est impossible de calculer analytiquement l'évolution d'un parton à partir du lagrangien QCD.

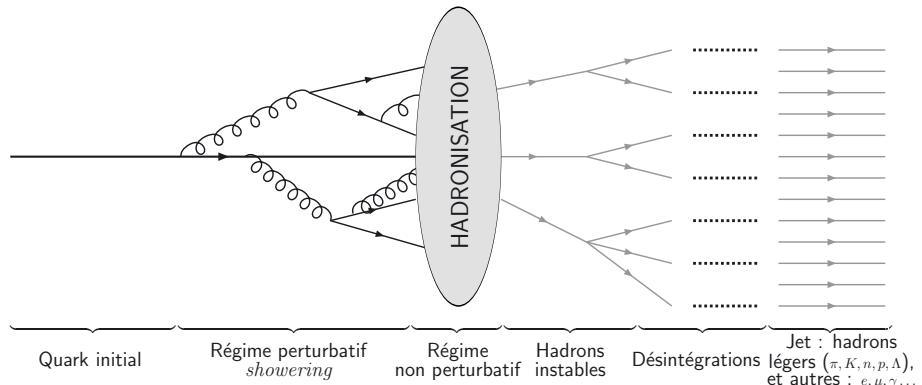


Figure 7.4 – Formation d'un jet de particules à partir d'un quark haute énergie.

Des approches numériques, voisines de méthode d'éléments finis, peuvent être utilisées, en théorie, pour résoudre les équations du mouvement en régime non perturbatif. Ces calculs, dits QCD sur réseau, sont extrêmement coûteux en temps de calcul. Ils permettent aujourd'hui, sous certaines hypothèses simplificatrices, de calculer les niveaux d'énergie des états liés (masse des hadrons) avec une précision de l'ordre du pourcent.

3.3 Structure des hadrons à haute énergie

Expérimentalement, on ne peut réaliser que des collisions (diffusions) entre hadrons (principalement protons et/ou antiprotons). À grande énergie, l'intensité de l'interaction diminue sensiblement. À courte distance (très inférieure au fermi, soit pour une énergie $E \gg 200 \text{ MeV} \approx \Lambda_{QCD}$), un hadron peut être décrit comme un ensemble de quarks et de gluons libres : c'est la liberté asymptotique. Les sous-structures des hadrons sont appelées partons, qui peuvent être :

- un quark ou un antiquark de valence : l'un des trois quarks constituant le hadron ;
- un quark ou un antiquark de la mer : l'un des quarks virtuels du vide QCD polarisé ;
- un gluon.

La structure du proton en termes de partons dépend de l'échelle de longueur ou d'énergie considérée. On décrit ce contenu par des densités de partons qui donnent la probabilité de trouver un parton d'un type donné (quark u , quark d , gluon, ...) portant une fraction x de l'impulsion du hadron. Ces densités contiennent la structure non perturbative de la théorie et doivent être déterminées expérimentalement. Par exemple, les densités de partons du proton sont déterminées en mesurant les sections efficaces de diffusion inélastique de l'électron (sonde ponctuelle, neutre de couleur) sur le proton. De manière analogue aux constantes de couplage, l'évolution de ces densités de partons avec l'échelle d'énergie peut être déterminée analytiquement. Il suffit de mesurer les densités de partons à une échelle particulière. La figure 7.5 donne les densités de partons du proton pour deux échelles d'énergie particulières. À $\mu = 1 \text{ GeV}$, la structure du

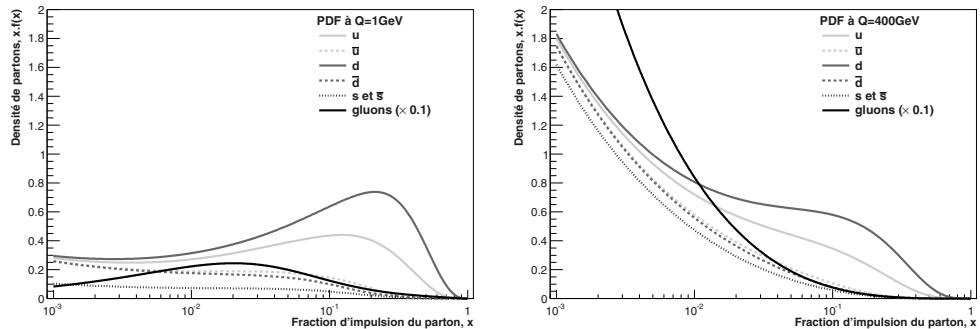


Figure 7.5 – Exemple de densités de partons dans le proton, pour une impulsion transférée $Q = 1 \text{ GeV}$ (à gauche) et pour une impulsion transférée $Q = 400 \text{ GeV}$ (à droite). Pour améliorer la lisibilité, la fonction des gluons est divisée par 10.

proton est dominée par les quarks de valence u et d , chacun portant en moyenne un tiers de l’impulsion totale. En augmentant l’énergie, les gluons et la mer ont une contribution de plus en plus importante et l’impulsion moyenne de chaque parton diminue.

Dans une collision hadronique à suffisamment haute énergie, ce sont les partons qui collisent effectivement. Le processus de diffusion à haute énergie entre deux hadrons, h_1 et h_2 d’impulsions respectives p_1 et p_2 , résultant en un état final X , se calcule en plusieurs étapes. Il faut d’abord déterminer toutes les interactions possibles entre partons donnant lieu à l’état final. Les sections efficaces partoniques, associées à chacun de ces processus, peuvent se calculer avec les diagrammes de Feynman, puisqu’on est en régime perturbatif. Plus précisément, on calcule la probabilité pour un parton i d’impulsion p_i et un parton j d’impulsion p_j de diffuser pour produire l’état final X : $\sigma_{ij}(p_i, p_j)$.

La section efficace totale de $h_1(p_1)h_2(p_2) \rightarrow X$ est alors obtenue en sommant les sections efficaces partoniques pondérées par la probabilité de trouver un parton de type i et d’impulsion p_i dans le hadron h_1 et un parton de type j et d’impulsion p_j dans le hadron h_2 . Cette section efficace s’écrit alors sous la forme :

$$\sigma(h_1h_2 \rightarrow X) = \sum_{i,j}^{\text{partons}} \int_0^1 \int_0^1 f_i^{h_1}(x_1) f_j^{h_2}(x_2) \hat{\sigma}(ij \rightarrow X) dx_1 dx_2,$$

où on a remplacé p_i et p_j par la fraction d’impulsion portée par le parton $x_i = \frac{p_i}{p_1}$ et

$x_f = \frac{p_f}{p_2}$. Dans cette approche, on factorise les composantes perturbative (sections efficaces partoniques) et non perturbative (densités de partons) du processus. Les densités de partons doivent être évaluées à une échelle d’énergie caractéristique du processus, de même que la constante de couplage α_s utilisée dans le calcul de sections efficaces partoniques. Cette énergie caractéristique n’est pas définie de manière unique. On peut choisir, par exemple, l’énergie moyenne dans le centre de masse \sqrt{s} du processus partonique, ou encore la masse du propagateur s’il s’agit d’une particule massive.

● L'essentiel

Les points clefs du chapitre

- ❶ Les particules interagissant par interaction forte à l'échelle nucléaire sont les hadrons. Parmi ceux-ci on peut citer le proton, le neutron et les pions.
- ❷ La grande multiplicité de hadrons observés expérimentalement ainsi que leurs propriétés ont conduit à postuler leur nature composite. Les hadrons sont des états liés de trois quarks ou d'un quark et d'un antiquark.
- ❸ L'interaction forte entre quarks est l'interaction élémentaire entre charges de couleur ou chromodynamique quantique (QCD). Les états liés hadroniques sont neutres de couleur. Leur interaction forte est un effet résiduel à l'image des forces de Van der Waals entre atomes électriquement neutres dans les structures moléculaires.
- ❹ La constante de couplage fort est de l'ordre de l'unité à basse énergie (200 MeV). Le développement perturbatif et l'approche par diagramme de Feynman n'est alors plus possible. La conséquence est le phénomène de confinement : les particules colorées ne peuvent exister qu'au sein d'états liés neutres.
- ❺ À l'inverse la constante de couplage diminue à haute énergie, on parle alors de liberté asymptotique. Le calcul perturbatif devient alors possible. C'est le cas, par exemple, pour les processus réalisés au LHC.
- ❻ Les hadrons sont des objets complexes. Ils sont composés de quarks en interaction, cette dernière se matérialisant sous la forme de gluons et de paires quarks-antiquarks. Cette composition en quarks et gluons d'un hadron dépend de l'échelle d'énergie et ne peut pas être calculée car l'interaction est non perturbative.



7.1 Rapport R

Le rapport R est défini par le ratio de la production électromagnétique de paires de hadrons comparée à celle de muons, dans les collisions électron-positron, à basse énergie ($\sqrt{s} \ll m_Z$) :

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}.$$

La section efficace de production de paires de muons vaut :

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s},$$

avec α la constante de structure fine.

À une énergie dans le centre de masse \sqrt{s} fixée il n'y a qu'un nombre de quarks limité qui sont accessibles cinématiquement. On note N_u et N_d le nombre de quarks de type u et d accessibles. On suppose que le nombre de charges de couleur N_c est inconnu.

- Justifiez la dépendance en α de la section efficace $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}$.
- Combien y a-t-il de diagrammes de Feynman pour $e^+e^- \rightarrow u\bar{u}$. En déduire la section efficace $\sigma_{e^+e^- \rightarrow u\bar{u}}$ en fonction du nombre de couleurs.
- Déterminez $\sigma_{e^+e^- \rightarrow d\bar{d}}$ en fonction du nombre de couleurs.
- En déduire R en fonction de N_u , N_d et N_c .
- On a mesuré $R = 2,2$ à $\sqrt{s} = 2$ GeV et $R = 3,4$ à $\sqrt{s} = 6$ GeV. En déduire le nombre de couleurs.

7.2 Formule de masse des mésons

Les formules de masse de Gell-Mann Okubo ne fonctionnent que pour les baryons. Nous allons dériver une formule similaire pour l'octet des mésons.

- En comparant les lagrangiens de Dirac et de Klein-Gordon, justifiez que la valeur moyenne du hamiltonien donne accès au carré de la masse de la particule.
- En déduire une relation entre les masses du kaon neutre, du η et du pion neutre (on prendra $m_{K^0} = m_{\bar{K}^0}$).
- Sachant que $m_{\pi^0} = 135$ MeV et $m_\eta = 548$ MeV, en déduire la masse du K^0 . Comparez avec la véritable valeur de m_{K^0} .

7.3 Échelle d'énergie de QCD

On définit la grandeur :

$$\Lambda_{QCD} = \mu e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu)\beta}}.$$

- À partir de l'équation d'évolution de la constante de couplage α_s , montrez que Λ_{QCD} est indépendant de l'échelle d'énergie μ .
- Verifiez que α_s diverge pour $\mu = \Lambda_{QCD}$. Comment interprète-t-on cette divergence ?
- Déterminez la valeur de Λ_{QCD} et commentez.

Introduction

Les neutrinos jouent un rôle unique dans le modèle standard. N'interagissant que par interaction faible, il est très difficile de les détecter. Leur masse est très inférieure à celle de l'électron et elle a longtemps été considérée comme nulle. Nous allons voir que pour expliquer certains résultats expérimentaux, les neutrinos sont nécessairement massifs.

Objectifs

- Connaître** le mécanisme d'oscillation de saveur et les propriétés des neutrinos.
- Définir** le fonctionnement d'un système quantique à deux niveaux et son application aux neutrinos.
- Expliquer** le rôle de la masse des neutrinos dans l'interprétation des flux de neutrinos solaire et atmosphériques observés.
- Expliquer** le découplage du modèle à trois neutrinos en deux modèles à deux neutrinos dans l'interprétation des données expérimentales.

Plan

- 1 Caractéristiques des neutrinos
- 2 Mécanisme d'oscillation
- 3 Oscillations à trois familles

1

Caractéristiques des neutrinos

1.1 Neutrino et modèle standard

Historiquement, le neutrino a été « inventé » en 1933 par Wolfgang Pauli pour expliquer le spectre continu des électrons émis dans les désintégrations β . Particule neutre, n'interagissant que par interaction faible, son existence n'a été confirmée expérimentalement qu'en 1956 par Clyde Cowan et Frederick Reines (prix Nobel 1995). Le modèle de Glashow, Salam et Weinberg de l'interaction électrofaible repose sur des doublets de particules avec un écart de charge d'une unité. L'interaction faible par courants chargés transforme les particules d'un doublet l'une en l'autre par émission ou absorption d'un boson W^\pm . C'est cette interaction faible par courants chargés qui relie, par exemple, les quarks u et d . De même, les leptons sont organisés en doublet. Le neutrino qui intervient

dans la désintégration β apparaît donc comme le partenaire électrofaible de l'électron. Il existe également des neutrinos associés aux leptons μ et τ .

Les trois neutrinos du modèle standard sont des particules de masse nulle qui n'interagissent que très faiblement avec la matière et peuvent traverser plusieurs milliers de kilomètres de roche sans interagir. De ce fait, ils ne sont jamais détectés dans les expériences classiques de physique des particules (expériences auprès des collisionneurs de particules). Les expériences spécifiques à la détection des neutrinos nécessitent de grands volumes actifs couplés à des flux élevés, pour observer quelques interactions de neutrinos.

1.2 Neutrinos solaires

L'énergie du soleil provient des processus de fusion nucléaire, principalement le cycle pp qui produit un noyau d'hélium 4 à partir de quatre noyaux d'hydrogène. Ce bilan est obtenu par plusieurs suites de réactions nucléaires, dont certaines produisent des neutrinos électroniques :

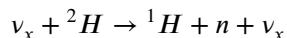
- production de deutérium 2H : $p + p \rightarrow ^2H + e^+ + \nu_e$ (99,6%), $p + p + e^- \rightarrow ^2H + \nu_e$ (0,4%)
- production de d 3He : $p + ^2H \rightarrow ^3H + \gamma$
- production directe d 4He : $^3He + ^3He \rightarrow ^4He + 2p$ (85%)
- production d 4He via le 7Be : $^3He + ^4He \rightarrow ^7Be + \gamma$ (15%) puis, $^7Be + e^- \rightarrow ^7Li + \nu_e$; $^7Li + p \rightarrow ^4He + ^4He$ (99,9%) ou $^7Be + p \rightarrow ^8B \rightarrow ^8Be + e^+ + \nu_e + \gamma$; $^8Be \rightarrow ^4He + ^4He$ (0,1%).

Les sections efficaces de ces différents processus ont été mesurées. Elles sont utilisées, avec de nombreux autres paramètres, dans la construction d'un modèle du soleil. Ce modèle prédit avec une excellente précision le flux de neutrinos électroniques sortant du soleil, en fonction de l'énergie.

Selon la réaction considérée, il y a de un à trois neutrinos de différentes énergies produits dans le processus de fusion. Le flux le plus intense vient de la fusion pp , mais ce sont également les neutrinos les moins énergétiques (~ 300 keV) et donc les plus difficiles à détecter. Les plus énergétiques sont les neutrinos du 8B (~ 8 MeV) dont le flux est six ordres de grandeur plus faible.

Depuis les années 1960, plusieurs expériences ont été réalisées pour mesurer le flux de neutrinos solaires et ont systématiquement mesuré un flux deux à trois fois plus faible que celui attendu. Ces expériences consistent en un grand volume de matériau cible (chlore, gallium, eau). Un neutrino électronique est diffusé par courant chargé par un noyau, créant une réaction β inverse $\nu_e + {}_Z^AX \rightarrow e^- + {}_{Z-1}^AY$. Dans les détecteurs au chlore (Homestake aux États-Unis) ou au gallium (Gallex en Italie et Sage en URSS), on compte après un certain temps d'exposition les atomes d'éléments Y produits. Dans les détecteurs à eau, le neutrino diffuse sur les noyaux d'hydrogène (SuperKamiokande

au Japon) ou de deutérium (SNO au Canada) ; l'électron ultrarelativiste produit de la lumière par effet Cherenkov dans l'eau qui est détectée par des photomultiplicateurs. En fonction du noyau cible, le seuil cinématique change et ces expériences sont sensibles à différentes parties du spectre en énergie. En revanche, l'énergie des neutrinos solaires ne dépassant pas quelques MeV, il est impossible de détecter ainsi les neutrino d'autres saveurs puisqu'il faudrait alors créer un muon ou un lepton τ , beaucoup trop lourds, dans l'état final. En 2003, l'expérience SNO (Sudbury Neutrino Observatory) mesure simultanément le flux de neutrinos électroniques, par effet Cherenkov après interaction par courants chargés, et le flux total de neutrinos en mesurant les diffusions par courants neutres sur le deutérium :



Pour un neutrino d'énergie supérieure à 1 MeV, le deutérium est dissocié et l'on détecte le neutron. Ce processus n'a pas les mêmes contraintes cinématiques que la diffusion par courants chargés et est insensible à la saveur du neutrino. Le flux de neutrinos électroniques mesuré est compatible avec les autres mesures et présente le même déficit. En revanche, le flux total est en accord avec les modèles solaires. Il semble donc que les neutrinos aient changé de saveur entre leur production et leur détection. Un tel comportement a été prédit dès 1957 par Bruno Pontecorvo, sous réserve que les neutrinos aient une masse. C'est le mécanisme d'oscillation de saveurs, similaire au mélange de saveurs observé dans le secteur des quarks et décrit par la matrice CKM.

2 Mécanisme d'oscillation

Dans ce qui suit nous allons considérer des neutrinos massifs, afin d'expliquer cette apparente disparition de neutrinos électroniques ou plutôt leur transformation en une autre saveur de neutrino. Ceci n'est en rien interdit, du moment que ces masses restent inférieures aux contraintes expérimentales, soit $m_\nu \lesssim 1$ eV. De plus, nous limiterons notre modèle à deux saveurs au lieu de trois : ν_e et ν_x ($x = \mu$ et τ).

Le neutrino ne peut être produit que via l'interaction faible. Les différentes saveurs de neutrino constituent des états propres du hamiltonien d'interaction. *A priori*, rien n'oblige ces états propres à être ceux qui diagonalisent le hamiltonien de propagation libre, qui sont les états propres de masse. On considère alors deux bases orthonormées : $|\nu_e\rangle$, $|\nu_x\rangle$ et $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$, reliées entre elles par une matrice de mélange V unitaire :

$$\begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_x\rangle \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

avec $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$. Cette matrice ne dépend que d'un unique paramètre, l'**angle de mélange** θ .

2.1 Hamiltonien dans la base d'interaction

Soit \mathcal{H} le hamiltonien de propagation libre, dans la base propre il s'écrit :

$$\mathcal{H} \begin{pmatrix} |v_1\rangle \\ |v_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v_1\rangle \\ |v_2\rangle \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Dans la base d'interaction, le hamiltonien devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' = V^\dagger \mathcal{H} V &= \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c^2 E_1 + s^2 E_2 & cs(E_2 - E_1) \\ cs(E_2 - E_1) & s^2 E_1 + c^2 E_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Les neutrinos sont produits dans un état d'impulsion définie, donc les deux états ont toujours la même impulsion. En supposant des neutrinos ultra-relativistes ($m_1, m_2 \ll p$), ce qui est le cas puisque les masses des neutrinos doivent être extrêmement faibles :

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \quad i = 1, 2, \quad (8.4)$$

et l'énergie moyenne est :

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2} \approx p. \quad (8.5)$$

En utilisant ces approximations, les termes diagonaux du hamiltonien deviennent :

$$c^2 E_1 + s^2 E_2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)E_1 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)E_2 \quad (8.6)$$

$$= E - \frac{\cos 2\theta \delta m^2}{4E}, \quad (8.7)$$

en posant $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. De même,

$$s^2 E_1 + c^2 E_2 = E + \frac{\cos 2\theta \delta m^2}{4E}. \quad (8.8)$$

Les termes non diagonaux se réécrivent :

$$cs(E_2 - E_1) = \frac{cs(m_2^2 - m_1^2)}{2p} = \frac{\delta m^2 \sin 2\theta}{4E}. \quad (8.9)$$

Finalement, le hamiltonien appliqué aux états d'interaction est :

$$\mathcal{H}' = \underbrace{\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}}_{\text{propagation libre}} + \underbrace{\frac{\delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}}_{\text{oscillation}}. \quad (8.10)$$

Ce hamiltonien se compose d'un terme de propagation libre, avec une énergie moyenne E et un terme d'oscillation qui vient de la différence de masse entre les états propres de masse $|v_1\rangle$ et $|v_2\rangle$. Si les masses sont identiques (mais pas nécessairement nulles) alors le

terme d'oscillation disparaît. C'est ce terme qui va permettre à un neutrino électronique produit dans le soleil d'être détecté comme ayant une autre saveur sur Terre.

2.2 Évolution temporelle

L'évolution des états $|\nu_1(\vec{x}, t)\rangle$ et $|\nu_2(\vec{x}, t)\rangle$ dans le temps est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$\mathcal{H} |\nu_i(\vec{x}, t)\rangle = E_i |\nu_i(\vec{x}, t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\nu_i(\vec{x}, t)\rangle$$

qui admet des solutions en ondes stationnaires :

$$\nu_i(\vec{x}, t) = e^{-iE_i t} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} |\nu_i(0)\rangle.$$

L'évolution temporelle des états d'interaction à l'impulsion \vec{p} est alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} |\nu_e(\vec{x}, t)\rangle \\ |\nu_x(\vec{x}, t)\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1(\vec{x}, t)\rangle \\ |\nu_2(\vec{x}, t)\rangle \end{pmatrix} \\ &= e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-iE_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_1(0)\rangle \\ |\nu_2(0)\rangle \end{pmatrix} \\ &= e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \begin{pmatrix} ce^{-iE_1 t} & se^{-iE_2 t} \\ -se^{-iE_1 t} & ce^{-iE_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e(0)\rangle \\ |\nu_x(0)\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

d'où finalement :

$$\begin{aligned} |\nu_e(\vec{x}, t)\rangle &= e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} [(c^2 e^{-iE_1 t} + s^2 e^{-iE_2 t}) |\nu_e(0)\rangle \\ &\quad + cs (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}) |\nu_x(0)\rangle], \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} |\nu_x(\vec{x}, t)\rangle &= e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} [cs (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}) |\nu_e(0)\rangle \\ &\quad + (s^2 e^{-iE_1 t} + c^2 e^{-iE_2 t}) |\nu_x(0)\rangle]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Un neutrino électronique est émis au temps $t = 0$, au point $x = 0$ et avec une impulsion \vec{p} . L'état initial dans la base d'interaction est donc $|\nu_e(0)\rangle = 1$ et $|\nu_x(0)\rangle = 0$. Après un temps t , le neutrino étant ultrarelativiste, la distance parcourue est alors $x \approx ct = t$ en unités naturelles. Les fonctions d'onde des états d'interaction deviennent :

$$\begin{aligned} |\nu_e(\vec{x}, t)\rangle &= e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (c^2 e^{-iE_1 t} + s^2 e^{-iE_2 t}) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} (c^2 e^{-iE_1 x} + s^2 e^{-iE_2 x}), \\ |\nu_x(\vec{x}, t)\rangle &= e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} cs (e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} cs (e^{-iE_2 x} - e^{-iE_1 x}). \end{aligned}$$

La probabilité de détecter un ν_x à la distance x du point d'émission est alors :

$$\begin{aligned}\left\langle \nu_x(\vec{x}) \middle| \nu_x(\vec{x}) \right\rangle &= c^2 s^2 \left| e^{-iE_2 x} - e^{-iE_1 x} \right|^2 \\ &= c^2 s^2 (2 - e^{-i(E_1 - E_2)x} - e^{i(E_1 - E_2)x}) \\ &= 4c^2 s^2 \frac{1 - \cos(E_1 - E_2)x}{2} \\ \left\langle \nu_x(\vec{x}) \middle| \nu_x(\vec{x}) \right\rangle &= \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{(E_1 - E_2)x}{2}.\end{aligned}\quad (8.14)$$

Finalement, en utilisant les mêmes approximations qu'au paragraphe précédent :

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_x}(x) = \left\langle \nu_x(\vec{x}) \middle| \nu_x(\vec{x}) \right\rangle = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta m^2 x}{4E}.\quad (8.15)$$

Cette probabilité est la probabilité d'apparition d'une autre saveur de neutrino. C'est une fonction périodique de la distance parcourue, avec une longueur d'oscillation :

$$L = \frac{4\pi E}{\delta m^2},\quad (8.16)$$

qui dépend de l'énergie (ou de l'impulsion) initiale et de l'écart de masse entre les deux états propres de masse. La probabilité d'apparition est nulle en $x = 2kL$ et maximale en $x = (2k + 1)L$. Dans ce dernier cas la probabilité vaut $P_{\max} = \sin^2 2\theta$. L'amplitude des oscillations est donnée par l'angle de mélange θ alors que la fréquence d'oscillation dépend de l'écart de masse. L'existence d'un tel mécanisme permet d'expliquer le déficit des neutrinos solaires. Les longueurs d'oscillation typiques sont de l'ordre de plusieurs milliers de kilomètres par GeV. En choisissant des unités appropriées, la formule (8.15) se réécrit :

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_x}(x) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{1,27 \delta m^2 (\text{eV}^2) x (\text{km})}{E (\text{GeV})}.\quad (8.17)$$

3 Oscillations à trois familles

Comme dans le secteur des quarks, il n'y a pas deux mais trois familles de leptons. La matrice de mélange est ainsi une matrice unitaire 3×3 qui joue un rôle analogue à la matrice CKM. La matrice de mélange porte le nom de matrice de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) :

$$\begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix} = V_{PMNS} \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu 1} & V_{\mu 2} & V_{\mu 3} \\ V_{\tau 1} & V_{\tau 2} & V_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix}.\quad (8.18)$$

Elle peut se décomposer en trois parties correspondant aux oscillations $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 3$ et $3 \leftrightarrow 1$. L'oscillation est alors paramétrée par trois angles de mélange : θ_{12} , θ_{23} , θ_{13} .

La matrice de mélange est une matrice 3×3 unitaire qui se factorise sous la forme :

$$V = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & -s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & -s_{23} \\ 0 & s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}. \quad (8.19)$$

Les mesures récentes (2012) donnent pour les différents angles de mélange :

$$\sin^2 2\theta_{12} \approx 0,86, \quad \sin^2 2\theta_{13} \approx 0,09, \quad \sin^2 2\theta_{23} \approx 0,97, \quad (8.20)$$

et pour les écarts de masses :

$$\delta m_{12}^2 \approx 7,6 \times 10^{-5} \text{ eV}^{-1}, \quad \delta m_{13}^2 \approx \delta m_{23}^2 \approx 2,4 \times 10^{-3} \text{ eV}^{-1}. \quad (8.21)$$

L'équation (8.19) est inexacte car la matrice de mélange peut autoriser des phases complexes dans certains termes. Néanmoins, ces phases sont petites et seront négligées dans notre discussion. La probabilité d'oscillation d'un état de saveur $\nu_{i=e,\mu,\tau}$ vers un état ν_j s'écrit :

$$P_{\nu_i \rightarrow \nu_j}(x) = \sum_{k=1}^3 V_{jk}^2 V_{ik}^2 + 2 \sum_{k>l} V_{jk} V_{ik} V_{jl} V_{il} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\delta m_{kl}^2 x}{4E} \right). \quad (8.22)$$

Les écarts de masse donnent la fréquence d'oscillation. Dans la mesure où $\delta m_{12}^2 \ll \delta m_{23}^2, \delta m_{13}^2$, il existe deux régimes très différents : une oscillation lente, dominée par l'oscillation $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$ et une oscillation rapide. De plus, l'amplitude de l'oscillation $\nu_1 \leftrightarrow \nu_3$ est relativement faible. Ceci permet d'interpréter beaucoup d'observations dans un modèle simplifié à deux neutrinos :

- Les neutrinos solaires sont composés exclusivement de neutrinos électroniques d'énergie allant de 0,1 à 10 MeV. Leur oscillation est principalement gouvernée par la composante lente comme l'illustre la figure 8.1. En négligeant les fluctuations dues à l'oscillation $\nu_1 \leftrightarrow \nu_3$, l'oscillation des neutrinos solaires s'explique dans un modèle d'oscillation à deux neutrinos entre ν_e et ν_x , qui est un mélange indéterminé de ν_μ et ν_τ . Cette oscillation correspond à l'oscillation $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$.
- La figure 8.2 illustre l'oscillation d'un état initial ν_μ . Les pions chargés produits dans le rayonnement cosmique secondaire se désintègrent selon $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ et $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Les muons (antimuons) ainsi produits peuvent également se désintégrer donnant naissance à un neutrino (antineutrino) muonique et un antineutrino (neutrino) électronique : $\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$ et $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$. Sans oscillation, on attend au niveau du sol environ un tiers de neutrinos électroniques et deux tiers de neutrinos muoniques. Expérimentalement, le flux de neutrinos muoniques est trop faible. Ces ν_μ ont, au minimum, une énergie de $m_\pi - m_\mu \approx 35$ MeV. Dans le modèle à trois neutrinos, sur une distance de 1000 km, ν_e oscille très peu (voir figure 8.1). L'oscillation se fait presque exclusivement entre ν_μ et ν_τ . Une fois encore, on peut ramener l'oscillation des neutrinos atmosphériques à un modèle à deux neutrinos (oscillation $\nu_2 \leftrightarrow \nu_3$). Des expériences utilisant des faisceaux neutrinos muoniques détectés à plusieurs

centaines de kilomètres du point d'émission permettent également de mesurer l'oscillation $\nu_2 \leftrightarrow \nu_3$. Ces expériences peuvent également détecter l'oscillation $\nu_1 \leftrightarrow \nu_3$, mais sa faible amplitude rend la mesure difficile.

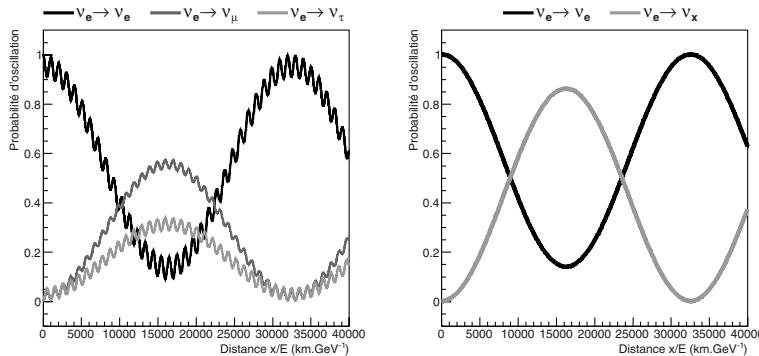


Figure 8.1– Oscillations d'un état initial ν_e dans le modèle à trois neutrinos (à gauche) et approximation dans un modèle à deux neutrinos $\nu_e \leftrightarrow \nu_x$ (à droite). Les courbes sont données en fonction de la distance parcourue pour un neutrino d'1 GeV. Le modèle à deux neutrinos utilise les paramètres d'oscillation des neutrinos solaires ($\delta m_\odot^2 \approx \delta m_{12}^2 = 7 \times 10^{-5} \text{ eV}^{-1}$ et $\sin^2 2\theta_\odot \approx \sin^2 2\theta_{12} = 0,86$).

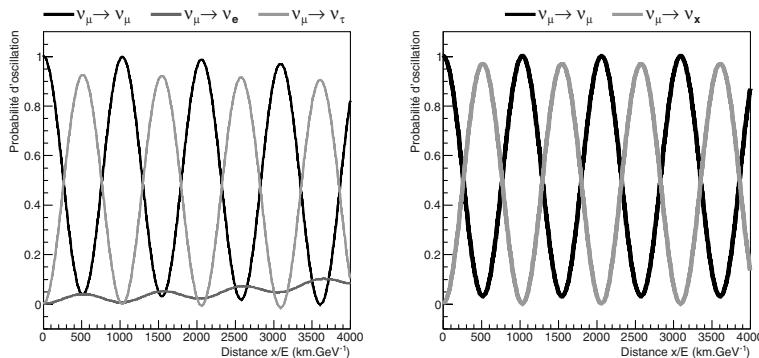


Figure 8.2– Oscillations d'un état initial ν_μ dans le modèle à trois neutrinos (à gauche) et approximation dans un modèle à deux neutrinos $\nu_\mu - \nu_\tau$ (à droite). Les courbes sont données en fonction de la distance parcourue pour un neutrino d'1 GeV. Le modèle à deux neutrinos utilise les paramètres d'oscillation des neutrinos atmosphériques ($\delta m_A^2 \approx \delta m_{23}^2 = 2,4 \times 10^{-3} \text{ eV}^{-1}$ et $\sin^2 2\theta_A \approx \sin^2 2\theta_{23} = 0,97$).

L'oscillation des neutrinos, et par conséquent la masse des neutrinos, constitue le premier phénomène de physique au-delà du modèle standard. Certes, il est tout à fait possible de rajouter des neutrinos massifs au modèle standard, avec un couplage au boson de Higgs, mais d'autres modèles plus exotiques ont été proposés pour expliquer cette très faible masse. La difficulté expérimentale due aux très faibles sections efficaces d'interaction des neutrinos avec la matière maintient de nombreuses interrogations quant à la nature des neutrinos.

Les points clefs du chapitre

- 1 Les neutrinos sont des particules très légères qui interagissent uniquement par interaction faible. Il existe trois saveurs neutrinos associées à chacun des trois leptons chargés (électron, muon et tau).
- 2 Les observations des flux de neutrinos en provenance du Soleil ou produits dans l'atmosphère semblent indiquer que le neutrino peut changer de saveur lors de sa propagation libre.
- 3 Le phénomène d'oscillation de saveur n'est possible que si les états propres de propagation (masse) et d'interaction (saveur) sont différents. De plus il faut que les neutrinos soient massifs et non dégénérés en masse.
- 4 Les paramètres d'oscillation mesurés permettent de déterminer les écarts de masse entre neutrinos mais pas leur masse absolue. Deux états de masse sont presque dégénérés alors que le troisième est sensiblement plus lourd. Les neutrinos restent cependant les particules massives les plus légères avec une masse inférieure à 1 eV.



Entraînez-vous

8.1 Expérience OPERA

L'expérience OPERA veut mettre en évidence l'apparition de ν_τ dans un faisceau de ν_μ . Le faisceau est produit au CERN, à Genève, qui délivre un faisceau de neutrinos de 17 GeV. Le détecteur OPERA est installé dans le tunnel du Gran Sasso, à 730 km du CERN. On décrira cette oscillation dans un modèle simplifié à deux neutrinos.

- Pour quelles valeurs de δm^2 l'amplitude d'oscillation est-elle au moins 5% du maximum ?
- Déterminez la région du plan $(\sin^2 2\theta, \delta m^2)$ pour laquelle la probabilité d'oscillation est au moins 5%.
- On sait que l'écart de masse δm^2 qui caractérise cette oscillation est $\delta m_A^2 \approx 0,0024 \text{ eV}^2$. Calculez la distance du premier maximum de l'oscillation. Commentez le résultat.
- L'expérience MINOS aux États-Unis étudie la même oscillation, avec une distance source détecteur similaire et des neutrinos d'environ 10 GeV. Quelle est l'expérience la plus adaptée ?

8.2 Énergie manquante et neutrino

Considérons une collision entre deux faisceaux de protons de 3,5 TeV chacun. Dans ces collisions, ce sont deux partons portant des fractions x_1 et x_2 de l'impulsion totale qui collisionnent. On choisit l'axe z du repère cartésien comme axe des faisceaux.

- Justifiez que pour les particules finales $\sum p_x = \sum p_y = 0$. Que peut-on dire de $\sum p_z$?

On mesure l'impulsion \vec{p}_i^{mes} des particules détectables (muons, électrons, jets, photons). On définit l'énergie transverse manquante \not{E}_T comme :

$$\not{E}_x = - \sum p_{x,i}^{mes}, \quad \not{E}_y = - \sum p_{y,i}^{mes}, \quad \not{E}_T = \sqrt{\not{E}_x^2 + \not{E}_y^2}.$$

- Si une des particules finales est un neutrino et que toutes les autres sont mesurées, déterminez les composantes transverses ($p_{x,\nu}$ et $p_{y,\nu}$) de l'impulsion du neutrino.
- Que se passe-t-il s'il y a deux neutrinos dans l'état final ?

Considérons un événement où on détecte un muon et un jet d'impulsions respectives :

$$\vec{p}_\mu = (9,1 \text{ GeV}, 32,9 \text{ GeV}, -34,7 \text{ GeV}), \quad \vec{p}_j = (34,6 \text{ GeV}, -7,6 \text{ GeV}, 10,9 \text{ GeV}).$$

On suppose que cet événement correspond à la production associée d'un boson W avec un parton (voir exercice 6.2) où le boson W se désintègre en un muon et un neutrino.

- Déterminez les composantes transverses de l'impulsion du neutrino.
- À partir de la conservation de la quadri-impulsion, exprimez la masse du boson W en fonction de $p_{z,\nu}$ et des grandeurs mesurées.
- Déterminez l'impulsion selon l'axe z ($p_{z,\nu}$) du neutrino.

Au-delà du modèle standard

Le modèle standard est une théorie quantique relativiste, formulée dans le cadre d'une théorie quantique des champs, décrivant notre compréhension actuelle de la physique des particules. Les interactions entre fermions élémentaires sont introduites en imposant l'invariance du lagrangien libre sous diverses classes de transformations : les symétries de jauge. Enfin, il faut ajouter au modèle la brisure spontanée de la symétrie de l'interaction faible pour conférer une masse aux bosons de jauge de cette interaction (W^\pm et Z) et aux fermions. Au final, ce modèle possède 19 paramètres libres, qui doivent être mesurés :

- Les constantes de couplage des trois interactions : α_{EM} , α_w et α_s .
- Les deux paramètres du potentiel de Higgs : m_h , la masse du boson de Higgs et λ le couplage quadrilinéaire.
- Les neuf couplages de Yukawa entre les fermions massifs (e^- , μ^- , τ^- , d , u , s , c , b , t) et le champ de Higgs. Dans le modèle standard, les neutrinos ont une masse nulle.
- Quatre paramètres pour décrire le mélange de saveurs des quarks par la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (trois angles et une phase).
- Une phase complexe, spécifique à l'interaction forte.

Le nombre de paramètres libres passe à 26 si on considère des neutrinos massifs (trois masses et quatre paramètres pour la matrice de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Ce modèle a été construit dans les années 1960 et 1970 et n'a pas été mis en défaut depuis. L'existence de particules comme le gluon, les bosons W^\pm et Z , le quark top ou plus récemment le boson de Higgs, toutes nécessaires à la validité du modèle, a été confirmée expérimentalement depuis la fin des années 1970 et les paramètres du modèle sont mesurés avec précision. À partir de ces paramètres, le modèle permet de calculer, par l'approche perturbative, un grand nombre d'observables (sections efficaces, rapports d'embranchement, évolution des constantes de couplage,...) qui présentent toutes un accord satisfaisant entre théorie et expérience.

En dépit de ces succès, il existe plusieurs arguments pour justifier que ce modèle n'est pas la théorie ultime mais un modèle effectif valide aux échelles d'énergies accessibles en laboratoire. Ces arguments sont de différentes natures.

Arguments théoriques : la renormalisation impose une évolution des constantes de couplage avec l'énergie. Dans le cas d'un champ vectoriel, ces corrections sont logarithmiques (voir équation (6.53)), mais pour un champ scalaire il apparaît également des termes quadratiques qui divergent rapidement. Le mécanisme de Higgs nécessite un ajustement *ad hoc* des paramètres pour assurer la compensation de ces corrections radiatives sur les couplages (et donc la masse) du boson de Higgs.

Par ailleurs, le modèle standard n'inclut pas la gravitation et reste incompatible avec la relativité générale.

Arguments cosmologiques : l'étude de la composition de l'univers montre que seul 4% du contenu en énergie de l'univers est composé de particules du modèle standard. Environ 23% de ce contenu est composé de matière massive (interaction gravitationnelle) mais invisible (ni interaction électromagnétique, ni interaction forte). Or il n'existe pas dans le modèle standard de particule massive, stable, interagissant très faiblement (le neutrino est exclu par d'autres arguments). Il doit alors exister au moins une particule stable supplémentaire pour justifier cette matière noire.

Les 72% restants sont de nature indéterminée et portent le nom générique d'énergie noire que rien dans le modèle standard ne peut expliquer.

Finalement, la fraction de l'univers formée de particules standard semble n'être composée très majoritairement que de fermions alors que les interactions du modèle standard impliquent toujours fermions et antifermions, soit autant de matière que d'antimatière. De fait, le modèle standard autorise une faible asymétrie entre matière et antimatière, mais insuffisante pour justifier le déséquilibre observé.

Arguments esthétiques, qui n'ont pas de réelle motivation autre que rendre la théorie plus compacte et homogène : les constantes de couplage des trois interactions forte, faible et électromagnétique semblent converger vers une énergie de l'ordre de 10^{15} GeV, mais la convergence n'est pas parfaite (voir figure 6.14). La présence d'autres particules contribuant à des énergies plus élevées pourrait modifier la pente des différents couplages et améliorer la convergence.

De plus, le nombre de paramètres du modèle peut paraître excessif, en particulier toutes les masses sont des paramètres libres. De même, le nombre de familles de fermions n'est pas contraint par le modèle. Ces deux aspects suggèrent l'existence d'une structure sous-jacente.

Il existe de multiples pistes pour étendre le modèle standard et résoudre tout ou partie des problèmes inhérents à ce dernier. Toutes prédisent l'existence de nouvelles particules (bosons ou fermions) dont aucune n'a été observée expérimentalement. Nous allons en exposer trois, en détaillant un peu plus les modèles de dimensions supplémentaires.

La supersymétrie est une forme de symétrie qui transforme un boson en fermion et inversement. Le nombre de particules est ainsi doublé en associant à chaque fermion du modèle standard un boson scalaire et à chaque boson un fermion de spin $\frac{1}{2}$. Ces modèles nécessitent un mécanisme de brisure de la symétrie électrofaible plus complexe, donnant cinq bosons de Higgs (trois neutres et deux chargés), au lieu d'un seul dans le modèle standard. Les partenaires supersymétriques des fermions sont les sfermions (squarks et sleptons) alors que les bosons ont pour partenaires les jauginos (gluino, photino, wino, zino) et les higgsinos. Les jauginos et les higgsinos de mêmes charges possèdent les mêmes nombres quantiques. Les états physiques sont généralement des

combinaisons linéaires des ces états. Ainsi, photino, zino et higgsinos neutres donnent quatre neutralinos ($\tilde{\chi}_{1,2,3,4}^0$) alors que les winos et higginos chargés conduisent aux quatre charginos ($\tilde{\chi}_{1,2}^{\pm}$). Si la supersymétrie était une symétrie exacte, les masses des superpartenaires seraient identiques à celles des particules. Comme de tels objets n'ont pas été observés, c'est que cette symétrie est brisée et les superpartenaires sont plus massifs que les particules du modèle standard.

La supersymétrie permet de résoudre les problèmes de renormalisation du champ de Higgs. En effet, les corrections radiatives dues aux boucles de bosons ont un signe opposé à celles des boucles de fermions. Les contributions des superpartenaires compensent les termes des particules du modèle standard. De plus, le lagrangien impose la production des particules supersymétriques par paire. La désintégration d'une particule supersymétrique donne toujours une particule supersymétrique dans l'état final. Ainsi la particule supersymétrique la plus légère doit être stable. Si en plus elle est électriquement neutre, par exemple un neutralino ou un sneutrino, cette particule présente les caractéristiques requises pour la matière noire.

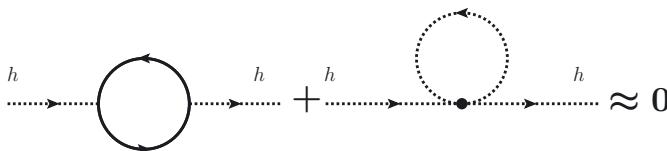


Figure 1– Compensation des contributions des fermions (à gauche) et des sfermions (à droite) aux corrections radiatives à la masse du Higgs.

Les théories de dimensions supplémentaires consistent à ajouter des dimensions spatiales, dans lesquelles seules certaines particules pourraient se propager. Le modèle le plus simple est une extension à cinq dimensions, les coordonnées¹ deviennent $x^M = (x^0, x^1, x^2, x^3, x^4)$. Ces nouvelles dimensions n'ayant pas d'effet au niveau macroscopique elles doivent être repliées sur elles-mêmes. La coordonnée x^4 est périodique : $x^4 = x$ et $x^4 = x + 2\pi R$ sont équivalents. La longueur R est le rayon de compactification qui caractérise la taille de la dimension supplémentaire. Ces concepts, imaginés dans les années 1920 par Theodor Kaluza puis par Oskar Klein, sont illustrés sur la figure 2.

Dans certains modèles, seule la gravitation peut se propager dans les dimensions supplémentaires. Le potentiel gravitationnel dans un espace à $4 + k$ dimensions se généralise sous la forme : $\mathcal{V}(r) = \frac{-Gm}{r^{1+k}}$. Si les k dimensions supplémentaires sont compactifiées, avec un même rayon de compactification R , le potentiel à grande distance ($r \gg R$) devient $\mathcal{V}(r) = \frac{-Gm}{rR^k} = \frac{-G'}{r}$. Dans ces expressions, G est la « vraie » constante de couplage gravitationnelle alors que G' est le couplage effectif vu dans les quatre dimensions usuelles. Dans un tel modèle, la gravitation peut avoir une constante

1. Les coordonnées à cinq dimensions sont notées avec un indice majuscule alors qu'on utilise des indices grecs pour les quadrivecteurs.

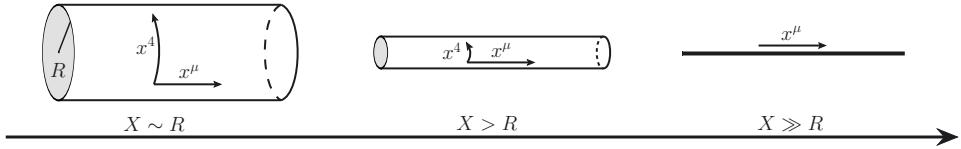


Figure 2 – Schématisation d'une dimension supplémentaire, x^4 , compactifiée. Pour un processus à l'échelle d'énergie E , si la longueur $X = \frac{1}{E}$ caractéristique est voisine ou plus petite que R , la nouvelle dimension a des conséquences physiques. Si, au contraire, $X \gg R$, seules les dimensions x^μ (représentées ici par une unique dimension) sont visibles : l'univers macroscopique se réduit aux quatre dimensions usuelles.

de couplage comparable à celle des autres interactions, qui est diluée dans les dimensions supplémentaires.

Les modèles de dimensions supplémentaires prédisent également de nouvelles particules. Pour un champ scalaire réel sans masse $\varphi^{5D}(x^M)$, la densité lagrangienne de Klein-Gordon se généralise à cinq dimensions sous la forme : $\mathcal{L}^{5D} = \frac{1}{2} \partial_M \varphi^{5D} \partial^M \varphi^{5D}$. La cinquième dimension étant périodique, le champ φ^{5D} peut se développer en série de Fourier :

$$\varphi^{5D}(x^\mu, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{4D}(x^\mu) e^{\frac{i2\pi n x^4}{R}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_n^{5D}(x^\mu, x^4),$$

où chaque coefficient φ_n^{4D} de la série ne dépend que des quatre coordonnées d'espace-temps usuelles et forme un champ scalaire complexe dans l'espace quadridimensionnel. Les dérivées de ce champ donnent :

$$\partial_M \tilde{\varphi}_n^{5D}(x^\mu, x^4) = \begin{cases} (\partial_\mu \varphi_n^{4D}) e^{\frac{i2\pi n x^4}{R}} & , M = \mu = 0 \dots 3 \\ \frac{i2\pi n}{R} \varphi_n^{4D} e^{\frac{i2\pi n x^4}{R}} & , M = 4 \end{cases} .$$

Le résultat est similaire pour $\partial^M \tilde{\varphi}_n^{5D}$ avec $\partial^4 = -\partial_4$. En injectant cette expression dans le lagrangien, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{5D} &= \frac{1}{2} \partial_M \varphi^{5D} \partial^M \varphi^{5D} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \left(\partial_\mu \varphi_m^{4D} \partial^\mu \varphi_n^{4D} - \frac{4\pi^2 mn}{R^2} \varphi_m^{4D} \varphi_n^{4D} \right) e^{\frac{i2\pi(m+n)x^4}{R}}. \end{aligned}$$

La densité lagrangienne effective à quatre dimensions s'obtient en intégrant la dimension supplémentaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{4D} &= \int \mathcal{L}^{5D} dx^4 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \left(\partial_\mu \varphi_m^{4D} \partial^\mu \varphi_n^{4D} - \frac{4\pi^2 mn}{R^2} \varphi_m^{4D} \varphi_n^{4D} \right) \int e^{\frac{i2\pi(m+n)x^4}{R}} dx^4. \end{aligned}$$

L'intégrale donne $\int e^{\frac{i2\pi(m+n)x^4}{R}} dx^4 = \delta(m+n) = \delta_{m,-n}$. Comme $\varphi_{-n}^{4D} = \varphi_n^{4D+}$, la densité lagrangienne dans l'espace à quatre dimensions est finalement :

$$\mathcal{L}^{4D} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_0^{4D} \partial^\mu \varphi_0^{4D+} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\partial_\mu \varphi_n^{4D} \partial^\mu \varphi_n^{4D+} - \frac{4\pi^2 n^2}{R^2} \varphi_n^{4D} \varphi_n^{4D+} \right).$$

C'est le lagrangien d'une infinité de champs scalaires : un champ φ_0 de masse nulle et des champs φ_n de masses croissantes $m_n = \frac{2\pi n}{R}$ qui forment une tour de Kaluza-Klein. La présence de la cinquième dimension se traduit dans le monde à quatre dimensions par la duplication de toutes les particules capables de se propager dans cette dimension. L'écart de masse entre deux modes de Kaluza-Klein successifs φ_n^{4D} et φ_{n+1}^{4D} est inversement proportionnel au rayon de compactification. Ces tours de Kaluza-Klein se généralisent à tout type de champ.

Les théories de grande unification visent à décrire les interactions de jauge avec un unique groupe et donc une unique constante de couplage. Cette symétrie unique serait brisée à haute énergie par un mécanisme analogue au mécanisme de Higgs, pour donner naissance au groupe de jauge du modèle standard. De tels modèles prédisent généralement des bosons de jauge massifs supplémentaires généralement notés W' (bosons chargés) et Z' (bosons neutres). Ils prévoient également l'existence de bosons de jauge couplant quarks et leptons, les leptoquarks, qui violent la conservation des nombres leptonique et baryonique. Le proton devient alors instable, comme l'illustre la figure 3 : pour maintenir la durée de vie du proton au-delà des limites expérimentales ($\tau_p > 10^{32}$ ans), le couplage effectif des leptoquarks doit être très faible impliquant des masses très élevées.

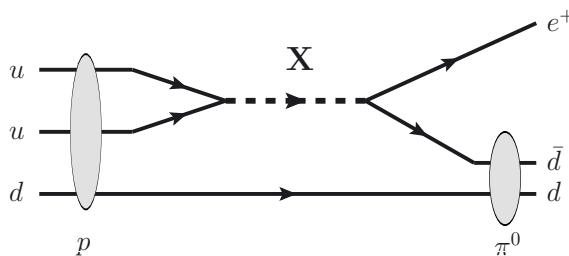


Figure 3 – Désintégration d'un proton en un positron et un pion. Le boson X qui intervient est un leptoquark. De tels couplages, violant la conservation des nombres leptonique et baryonique, sont absents du modèle standard mais apparaissent dans certaines théories de grande unification.

Il est souvent possible de combiner plusieurs des ces concepts pour construire une extension du modèle standard. Seule l'éventuelle observation de nouvelles particules absentes du modèle standard pourra permettre de valider un modèle particulier.

Au-delà du modèle standard

Toutes ces extensions restent formulées dans le cadre d'une théorie quantique des champs. La faiblesse la plus flagrante du modèle standard est l'absence de la gravitation, pour laquelle il n'existe pas encore de formalisation quantique satisfaisante ni de tests expérimentaux du régime quantique de la gravitation. La théorie actuelle de la gravitation, la relativité générale, s'exprime dans un formalisme assez différent de la théorie quantique des champs. Pour unifier les quatre interactions, il faudra vraisemblablement envisager, à nouveau, un changement de formalisme. Là encore, plusieurs pistes sont explorées, comme la gravité quantique à boucles, la théorie des champs en espace courbe ou les théories des cordes. Néanmoins l'absence de prédictions phénoménologiques autant que de tests expérimentaux ne permet pas aujourd'hui de favoriser un modèle plutôt qu'un autre.

Quelques particules

Vous trouverez ici les caractéristiques des particules les plus courantes. Les données sont extraites de *The Review of Particle Physics* : J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D86 (2012).

Bosons élémentaires

Photon γ : médiateur de l’interaction électromagnétique, ne porte aucune charge,

- masse : $m_\gamma = 0$,
- spin : $J = 1$,
- charge : $Q = 0$,
- interaction faible : non,
- couleur : non.

Gluon g : médiateur de l’interaction forte,

- masse : $m_g = 0$,
- spin : $J = 1$,
- charge : $Q = 0$,
- interaction faible : non,
- couleur : oui (couleur et anticolleur, 8 combinaisons).

W^+ , W^- : médiateurs de l’interaction faible par courants chargés, seul couplage susceptible de changer la saveur des quarks (matrice CKM),

- masse : $m_W = 80,4$ GeV,
- spin : $J = 1$
- charge : $Q = \pm 1$,
- interaction faible : oui,
- couleur : non,
- principales désintégrations :
 - $\ell\nu_\ell$, $\ell = e, \mu, \tau$: 10 % par lepton,
 - $q\bar{q}'$: 70 % au total.

Z : médiateur de l’interaction faible par courants neutres,

- masse : $m_Z = 91,2$ GeV,
- spin : $J = 1$,
- charge : $Q = 0$,
- interaction faible : oui,

Quelques particules

- couleur : non,
- principales désintégrations :
 - $\ell^+ \ell^-, \ell = e, \mu, \tau$: 3,4 % par lepton,
 - $\nu_\ell \bar{\nu}_\ell$: 20 % au total,
 - $b\bar{b}$: 15,4 %,
 - $c\bar{c}$: 11,9 %,
 - $q\bar{q}$: 69,9 % toutes saveurs confondues.

Boson de Higgs h : particule associée à la brisure spontanée de la symétrie électrofaible,

- masse : $m_h = 125,1$ GeV,
- spin : $J = 0$,
- charge : $Q = 0$,
- interaction faible : oui,
- couleur : non,
- principales désintégrations (dans le modèle standard) :
 - $b\bar{b}$: 59 %,
 - $\tau^-\tau^+$: 0,06 %,
 - WW^* : 22 %,
 - ZZ^* : 28 %,
 - $\gamma\gamma$: 0,003 %.

Leptons

Électron e^- :

- masse : $m_e = 0,511$ MeV,
- spin : $J = 1/2$,
- durée de vie : stable,
- charge : $Q = -1$,
- interaction faible : oui,
- couleur : non.

Muon μ^- :

- masse : $m_\mu = 105$ MeV,
- spin : $J = 1/2$,
- durée de vie : $\tau_\mu = 2,2 \times 10^{-6}$ s,
- charge : $Q = -1$,

- interaction faible : oui,
- couleur : non.

Tau τ^- :

- masse : $m_\tau = 1777$ MeV,
- spin : $J = 1/2$,
- durée de vie : $\tau_\tau = 2,9 \times 10^{-13}$ s,
- charge : $Q = -1$,
- interaction faible : oui,
- couleur : non.

Neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ :

- masse : $m_\nu \lesssim 1$ eV,
- spin : $J = 1/2$,
- durée de vie : stables,
- charge : $Q = 0$,
- interaction faible : oui,
- couleur : non,
- trois états de saveur associés aux leptons chargés : ν_e, ν_μ, ν_τ ,
- trois états propres de masse : ν_1, ν_2, ν_3 .

Quarks

Les quarks sont des particules colorées (interaction forte). Ils n'existent que sous forme d'états liés (hadrons), à l'exception du quark top qui se désintègre avant de pouvoir se lier.

Up u :

- masse : $m_u \approx 1 - 3$ MeV,
- spin : $J = 1/2$,
- charge : $Q = 2/3$,
- interaction faible : oui,
- couleur : oui.

Down d :

- masse : $m_d \approx 2 - 5$ MeV,
- spin : $J = 1/2$,
- charge : $Q = -1/3$,

Quelques particules

- interaction faible : oui,
- couleur : oui.

Étrange (strange) s :

- masse : $m_s \approx 100$ MeV,
- spin : $J = 1/2$,
- charge : $Q = -1/3$,
- interaction faible : oui,
- couleur : oui.

Charme (charm) c :

- masse : $m_c \approx 1500$ MeV,
- spin : $J = 1/2$,
- charge : $Q = 2/3$,
- interaction faible : oui,
- couleur : oui.

Beau (bottom) b :

- masse : $m_b \approx 4700$ MeV,
- spin : $J = 1/2$,
- charge : $Q = -1/3$,
- interaction faible : oui,
- couleur : oui.

Top t :

- masse : $m_t = 173 \pm 1$ GeV,
- spin : $J = 1/2$,
- charge : $Q = 2/3$,
- interaction faible : oui,
- couleur : oui,
- durée de vie $\tau_t = 10^{-25}$ s, désintégration : $t \rightarrow W^+ b$.

Hadrons

États liés d'un quark et d'un antiquark (mésons) ou de trois quarks (baryons), neutres de couleur.

Mésons chargés

États liés d'un quark de type « up » et un antiquark de type « down » et réciproquement.

Pions chargés π^\pm :

- état lié : $u\bar{d}$, $\bar{u}d$,
- masse : $m_{\pi^\pm} = 140$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 2,6 \times 10^{-8}$ s.

Kaons chargés K^\pm :

- état lié : $u\bar{s}$, $\bar{u}s$,
- masse : $m_{K^\pm} = 494$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 1,2 \times 10^{-8}$ s.

D^\pm :

- état lié : $c\bar{d}$, $\bar{c}d$,
- masse : $m_{D^\pm} = 1870$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 1,0 \times 10^{-12}$ s.

D_s^\pm :

- état lié : $c\bar{s}$, $\bar{c}s$,
- masse : $m_{D_s^\pm} = 1968$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 5,0 \times 10^{-13}$ s.

B^\pm :

- état lié : $b\bar{u}$, $\bar{b}u$,
- masse : $m_{B^\pm} = 5279$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 1,6 \times 10^{-12}$ s.

B_c^\pm :

- état lié : $b\bar{c}$, $\bar{b}c$,
- masse : $m_{B_c^\pm} = 6277$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 4,5 \times 10^{-13}$ s.

Mésons neutres

États liés d'un quark et d'un antiquark de même type.

pion neutre π^0 :

- état lié : $u\bar{u} + d\bar{d}$,
- masse : $m_{\pi^0} = 135$ MeV, spin : $J = 0$,

Quelques particules

- durée de vie : $\tau = 8,4 \times 10^{-17}$ s.

Eta η :

- état lié : $u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}$,
- masse : $m_\eta = 548$ MeV, spin : $J = 0$.

Kaons neutres K^0, \bar{K}^0 :

- états liés : $s\bar{d}, \bar{d}s$,
- masse : $m_{K^0} = 498$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : il existe deux états, K_L^0 ($\tau_{K_L^0} = 5,1 \times 10^{-6}$ s) et K_S^0 ($\tau_{K_S^0} = 8,9 \times 10^{-11}$ s).

J-psi J/ψ :

- état lié : $c\bar{c}$,
- masse : $m_{J/\psi} = 3097$ MeV, spin : $J = 1$,

D^0, \bar{D}^0 :

- états liés : $c\bar{u}, \bar{c}u$,
- masse : $m_{D^0} = 1865$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 4,1 \times 10^{-13}$ s.

Upsilon Υ :

- état lié : $b\bar{b}$,
- masse : $m_\Upsilon = 9460$ MeV, spin : $J = 1$,

B^0, \bar{B}^0 :

- états liés : $b\bar{d}, \bar{b}d$,
- masse : $m_{B_0} = 5280$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 1,5 \times 10^{-12}$ s.

B_s, \bar{B}_s :

- états liés : $b\bar{s}, \bar{b}s$,
- masse : $m_{B_s^\pm} = 5367$ MeV, spin : $J = 0$,
- durée de vie : $\tau = 1,5 \times 10^{-12}$ s.

Baryons

Proton p :

- état lié : uud ,
- masse : $m_p = 938$ MeV, spin : $J = 1/2$, charge $Q=1$,
- durée de vie : stable.

Neutron n :

- état lié : udd ,
- masse : $m_n = 939$ MeV, spin : $J = 1/2$, charge $Q=0$,
- durée de vie : $\tau_n = 880$ s (stable quand lié dans un noyau).

Delta $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$:

- états liés : uuu, uud, udd, ddd ,
- masse : ${}^m\Delta \approx 1230$ MeV, spin : $J = 3/2$.

Lambda Λ :

- état lié : usd ,
- masse : $m_\Lambda \approx 1116$ MeV, spin : $J = 1/2$,
- durée de vie : $\tau = 2,6 \times 10^{-10}$ s.

Sigma Σ^\pm, Σ^0 :

- états liés : uus, usd, sdd ,
- masse : $m_\Sigma \approx 1190$ MeV, spin : $J = 1/2$,
- durée de vie (Σ^\pm) : $\tau = 1,5 \times 10^{-10}$ s.

Xi Ξ^-, Ξ^0 :

- états liés : uss, ssd ,
- masse : $m_\Xi \approx 1320$ MeV, spin : $J = 1/2$,
- durée de vie : $\tau \approx 2 \times 10^{-10}$ s.

Omega Ω^- :

- état lié : sss ,
- masse : $m_{\Omega^-} = 1672$ MeV, spin : $J = 3/2$,
- durée de vie : $\tau = 8,2 \times 10^{-11}$ s.

Chapitre 1

1.1 Unités naturelles

- a) Dans le système international, l'action a la dimension d'une énergie multipliée par un temps : $[\hbar] = E \cdot T$. Donc en unités naturelles :

$$1 = [\hbar] = E \cdot T \Rightarrow T = E^{-1},$$

et

$$1 = \hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ s} = \frac{1}{1,05 \times 10^{-34}} \text{ J}^{-1} = \frac{1,6 \times 10^{-19}}{1,05 \times 10^{-34}} \text{ eV}^{-1} = 1,52 \times 10^{15} \text{ eV}^{-1}.$$

- b) En utilisant la vitesse la lumière :

$$1 = [c] = L \cdot T^{-1} \Rightarrow L = T = E^{-1}.$$

Temps et espace ont la même dimension, ce qui est attendu dans une théorie relativiste. On en déduit le facteur de conversion pour le mètre :

$$1 = c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ m} = \frac{1 \text{ s}}{3 \times 10^8} = \frac{1,52 \times 10^{15}}{3 \times 10^8} \text{ eV}^{-1} = 5,05 \times 10^6 \text{ eV}^{-1}.$$

- c) Les sections efficaces d'interaction dans les collisionneurs varient entre le fb et le nb. La conversion en unités naturelles donne :

$$1 \text{ pb} = 10^{-12} \times 10^{-24} \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 5,05^2 \times 10^{-28} \text{ eV}^{-2} = 2,55 \times 10^{-27} \text{ eV}^{-2},$$

1.2 Gravitation

- a) La durée de vie du quark top est $\tau_t = 10^{-25} \text{ s}$, soit une distance parcourue pour un top ultrarelativiste de $r_t = c\tau_t = 3 \times 10^{-17} \text{ m}$.
- b) L'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$E_p^{(g)} = G \frac{m_t^2}{r_t} = 2,08 \times 10^{-43} \text{ J} = 1,3 \times 10^{-30} \text{ MeV},$$

avec :

$$G = 6,77 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{k.g}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \text{ et } m_t = 173,5 \text{ GeV} = 3,06 \times 10^{-25} \text{ kg}.$$

- c) La charge du quark top est $q_t = \frac{2}{3}e$. L'énergie potentielle électrostatique est donc :

$$E_p^{(el)} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_t} = 3,42 \times 10^{-12} \text{ J} = 21,3 \text{ MeV}.$$

avec :

$$\frac{q^2}{4\pi e^0} = \alpha \hbar c = \frac{\hbar c}{137}, \alpha \text{ étant la constante de structure fine.}$$

Il y a 31 ordres de grandeur d'écart. Les effets gravitationnels sont négligeables.

1.3 Échelle de Plank

- a) En unités naturelles, la masse est homogène à une énergie. La longueur associée, dite longueur d'onde Compton, est alors : $\lambda = \frac{1}{m}$. En restaurant les facteurs c et \hbar : $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$.
- b) L'énergie de masse, pour une particule au repos est mc^2 . En égalant avec l'énergie potentielle de gravitation :

$$m_{\text{plank}} c^2 = G \frac{m_{\text{plank}}^2}{\lambda_{\text{plank}}} = G \frac{m_{\text{plank}}^3}{\hbar c} \rightarrow m_{\text{plank}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV.}$$

Cette échelle d'énergie est supérieure de plusieurs ordres de grandeur aux énergies accessibles en laboratoire (de l'ordre de la dizaine de milliers de GeV), confirmant une nouvelle fois que les effets gravitationnels sont négligeables.

1.4 Quelques processus

- a) $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$: interaction forte.
- b) $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$: interaction électromagnétique (photodissociation).
- c) $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$: interaction faible (neutrinos).
- d) $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + e^+ + e^-$: interaction électromagnétique ($\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow e^+ + e^- + e^+ + e^-$). La transition via un boson Z est *a priori* possible mais très peu probable.
- e) $p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$: interaction forte.
- f) $\tau^- \rightarrow \pi^+ + \nu_\tau$: interaction faible.
- g) $D^- \rightarrow K^+ + \pi^- + \pi^-$: interaction faible (changement de saveur de quark $c \rightarrow s$).
- h) $\Lambda + p \rightarrow K^- + p + p$: interaction forte (conservation de l'étrangeté).

1.5 Collisions de protons

- a) La longueur d'onde de de Broglie $\lambda = \frac{\hbar c}{E}$ donne l'échelle de longueur caractéristique de cette collision. En unités SI, $\hbar c = 197 \text{ MeV.fm}$, soit $\lambda = 197/8 \times 10^6 = 2,5 \times 10^{-5} \text{ fm}$.
- b) L'échelle de longeur est 5 ordres de grandeur plus faible que la dimension du proton. L'interaction est alors sensible aux sous-structures du proton. Les collisions réalisées sont donc des collisions entre quarks (et gluons).
- c) La condition cinématique à respecter est $m_W + m_g < \sqrt{s}$, soit $\sqrt{s} > 80,4 \text{ GeV}$. Cette condition est largement vérifiée ici, même si les particules qui collisionnent (quarks et gluons) ne portent qu'une fraction de l'impulsion initiale des protons. Par

ailleurs, pour produire un boson W et un gluon, ces particules doivent se coupler aux quarks, ce qui est le cas puisque ces derniers participent aux interactions faible (W) et forte (gluons).

Chapitre 2

2.1 Invariance par rotation

- a) On considère la transformation continue de paramètre θ :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x(\theta) = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y &\rightarrow y(\theta) = x \sin \theta + y \cos \theta, \\ z &\rightarrow z(\theta) = z. \end{aligned}$$

Le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}(\theta)^2 + \dot{y}(\theta)^2 + \dot{z}(\theta)^2).$$

L'invariant I peut être calculé pour n'importe quelle valeur de θ . En se plaçant à $\theta = 0$:

$$I = m\dot{x} \left. \frac{\partial x(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} + m\dot{y} \left. \frac{\partial y(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} + m\dot{z} \left. \frac{\partial z(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0},$$

avec :

$$\left. \frac{\partial x(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = -x \sin \theta - y \cos \theta = -y, \quad \left. \frac{\partial y(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = x \cos \theta + y \sin \theta = x,$$

$$\left. \frac{\partial z(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0,$$

soit :

$$I = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Le moment cinétique étant $\vec{J} = m\vec{x} \wedge \dot{\vec{x}}$, I est bien la composante J_z du moment cinétique.

- b) De la même manière, on trouve que les invariants associés à une rotation autour des axes x et y sont respectivement J_x et J_y . Par extension, le moment cinétique est l'invariant associé à une rotation d'espace quelconque.

2.2 Représentation d'interaction

- a) En posant $t_0 = 0$, on a :

$$\hat{U}(t, 0) = \hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} \text{ et } \hat{U}_0(t, 0) = \hat{U}_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t}.$$

Par définition :

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{U}_0^+(t) |\psi_S(t)\rangle = \hat{U}_0^+(t) \hat{U}(t) |\psi_H\rangle \Rightarrow |\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}t} |\psi_H\rangle.$$

Les opérateurs \hat{H}_0 et \hat{H} ne commutent pas et on ne peut pas regrouper les deux exponentielles.

b) En dérivant $|\psi_I(t)\rangle$ par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_I t} \right) |\psi_H\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_I t} - e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0} \hat{\mathcal{H}} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_I t} \right) |\psi_H\rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0} (\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{H}}_0) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_I t} |\psi_H\rangle.\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant $\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\mathcal{V}}$ et $\hat{U}_0^+ \hat{U}_0 = \mathbb{1}$, il vient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0} \hat{\mathcal{V}} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} |\psi_H\rangle = \hat{\mathcal{V}}_I |\psi_I(t)\rangle,$$

qui est l'équation d'évolution d'un état en représentation d'interaction.

c) Un opérateur en représentation d'interaction se déduit de l'opérateur en représentation de Schrödinger (indépendant du temps) par :

$$\hat{O}_I = \hat{U}_0^+ \hat{O}_S \hat{U}_0 = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t}.$$

En dérivant \hat{O}_I par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_I &= \frac{i}{\hbar} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} - e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{O}_S \hat{\mathcal{H}}_0 e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} - e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{O}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{\mathcal{H}}_0 \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} (\hat{\mathcal{H}}_0 \hat{O}_I - \hat{O}_I \hat{\mathcal{H}}_0).\end{aligned}$$

D'où le résultat final :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{O}_I = [\hat{O}_I, \hat{\mathcal{H}}_0].$$

2.3 Équation d'Euler-Lagrange

Le lagrangien dépend explicitement du champ φ et des quatre dérivées $\partial_\mu \varphi$. Le principe de moindre action devient alors :

$$\delta \mathcal{S} = \iiint d^4x \mathcal{L}(\varphi + \delta\varphi, \partial_\mu \varphi + \delta\partial_\mu \varphi) - \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) = 0.$$

En explicitant toutes les coordonnées :

$$\begin{aligned}0 &= \int_{x_0^{(i)}}^{x_0^{(f)}} \int_{x_1^{(i)}}^{x_1^{(f)}} \int_{x_2^{(i)}}^{x_2^{(f)}} \int_{x_3^{(i)}}^{x_3^{(f)}} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta\varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \varphi} \delta\partial_0 \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_1 \varphi} \delta\partial_1 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_2 \varphi} \delta\partial_2 \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_3 \varphi} \delta\partial_3 \varphi \right) d^4x.\end{aligned}$$

En intégrant par partie chaque terme $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \partial_\mu \varphi$ relativement à x_μ , il vient :

$$\begin{aligned}
 0 &= \iiint \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi d^4 x \\
 &+ \int_{x_1^{(i)}}^{x_1^{(f)}} \int_{x_2^{(i)}}^{x_2^{(f)}} \int_{x_3^{(i)}}^{x_3^{(f)}} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \varphi} \delta \varphi \right]_{x_0^{(i)}}^{x_0^{(f)}} dx^1 dx^2 dx^3 - \iiint \partial_0 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \varphi} \delta \varphi d^4 x \\
 &+ \int_{x_0^{(i)}}^{x_0^{(f)}} \int_{x_2^{(i)}}^{x_2^{(f)}} \int_{x_3^{(i)}}^{x_3^{(f)}} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_1 \varphi} \delta \varphi \right]_{x_1^{(i)}}^{x_1^{(f)}} dx^0 dx^2 dx^3 - \iiint \partial_1 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_1 \varphi} \delta \varphi d^4 x \\
 &+ \int_{x_0^{(i)}}^{x_0^{(f)}} \int_{x_1^{(i)}}^{x_1^{(f)}} \int_{x_3^{(i)}}^{x_3^{(f)}} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_2 \varphi} \delta \varphi \right]_{x_2^{(i)}}^{x_2^{(f)}} dx^0 dx^1 dx^3 - \iiint \partial_2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_2 \varphi} \delta \varphi d^4 x \\
 &+ \int_{x_0^{(i)}}^{x_0^{(f)}} \int_{x_1^{(i)}}^{x_1^{(f)}} \int_{x_2^{(i)}}^{x_2^{(f)}} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_3 \varphi} \delta \varphi \right]_{x_3^{(i)}}^{x_3^{(f)}} dx^0 dx^1 dx^2 - \iiint \partial_3 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_3 \varphi} \delta \varphi d^4 x.
 \end{aligned}$$

Les états initiaux et finaux étant entièrement définis, soit :

$$\delta \varphi(x_\mu^{(i)}) = \delta \varphi(x_\mu^{(f)}) = 0 \Rightarrow \iiint \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \delta \varphi \right]_{x_\mu^{(i)}}^{x_\mu^{(f)}} d^3 x = 0.$$

En réintroduisant les conventions de sommation implicite sur l'indice μ :

$$0 = \iiint \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \right) \delta \varphi d^4 x.$$

L'intégrale étant nulle pour tout $\delta \varphi$, on en déduit l'équation d'Euler-Lagrange pour un champ :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} = 0.$$

2.4 Seuil de l'interaction $np \rightarrow \pi^0 D$

a) Dans le référentiel du laboratoire, les quadri-impulsions des deux particules sont :

$$p_n = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_p = \begin{pmatrix} m_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

l'axe x étant choisi dans la direction du faisceau incident. L'énergie dans le centre de masse est alors :

$$s = \left| p_n + p_p \right|^2 = p_n^2 + p_p^2 + 2 p_n \cdot p_p = m_n^2 + m_p^2 + 2 E m_p.$$

Au seuil de production, les particules de l'état final sont au repos dans le référentiel du centre de masse, soit dans ce référentiel :

$$p_{\pi^0} = \begin{pmatrix} m_{\pi^0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_D = \begin{pmatrix} m_D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et l'énergie dans le centre de masse est :

$$s = |p_{\pi^0} + p_D|^2 = (m_{\pi^0} + m_D)^2.$$

En égalant les deux expressions de l'invariant relativiste s :

$$m_n^2 + m_p^2 + 2Em_p = (m_{\pi^0} + m_D)^2 \Rightarrow E = \frac{(m_{\pi^0} + m_D)^2 - m_n^2 - m_p^2}{2m_p}.$$

L'application numérique donne pour l'énergie du neutron : $E = 1215,2 \text{ MeV}$.

- b) Le facteur de Lorentz se déduit de la composante temporelle de la quadri-impulsion : $\gamma = \frac{E}{m_n}$. La vitesse des neutrons est alors :

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_n}{E}\right)}.$$

L'application numérique donne $\beta = 0,634$ soit $v = 1,902 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

2.5 Cible fixe et collision

- a) Pour une collision sur cible fixe, les quadri-impulsions des deux protons, dans le référentiel du laboratoire, sont :

$$p_1 = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} m_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et l'énergie dans le centre de masse est :

$$s_{\text{fixe}} = |p_1 + p_2|^2 = 2m_p^2 + 2Em_p.$$

- b) Pour une collision symétrique de deux faisceaux d'énergie $\frac{E}{2}$, le laboratoire est le référentiel du centre de masse et $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$, d'où :

$$p_1 = \begin{pmatrix} \frac{E}{2} \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} \frac{E}{2} \\ -p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_{\text{collisionneur}} = E^2.$$

- c) Dans le cas de collisions à haute énergie, $E \gg m_p$:

$$s_{\text{fixe}} \approx 2Em_p \ll E^2 = s_{\text{collisionneur}}.$$

Pour une même énergie totale d'accélération (c'est-à-dire pour une même longueur d'accélération), il est beaucoup plus efficace de collisionner deux faisceaux. Technologiquement, ceci est plus complexe à réaliser, c'est pourquoi les premières expériences de collisions entre particules étaient réalisées sur des cibles fixes.

2.6 Production d'antiprotons

La production d'antiprotons est un cas particulier de l'exercice précédent. Au seuil de production, l'énergie dans le centre de masse est $\sqrt{s} = 4m_p$ (proton et antiproton ayant la même masse).

- a) Cible fixe : $2m_p^2 + Em_p = 16m_p^2 \Rightarrow E = \frac{14m_p^2}{2m_p} = 7m_p$.
- b) Collision symétrique : $E = 4m_p$.

Chapitre 3

3.1 Changement de variables

Le premier commutateur donne :

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_i^+, \tilde{a}_j^+]_{\pm} &= \left(\sum_m \alpha_{mi} a_m^+ \right) \left(\sum_n \alpha_{nj} a_n^+ \right) \pm \left(\sum_n \alpha_{nj} a_n^+ \right) \left(\sum_m \alpha_{mi} a_m^+ \right) \\ &= \sum_{m,n} \alpha_{mi} \alpha_{nj} a_m^+ a_n^+ \pm \sum_{m,n} \alpha_{mi} \alpha_{nj} a_n^+ a_m^+ \\ &= \sum_{m,n} \alpha_{mi} \alpha_{nj} [a_m^+, a_n^+]_{\pm} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, $[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j]_{\pm} = 0$. Pour le dernier commutateur, le calcul aboutit à :

$$\begin{aligned} [\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^+]_{\pm} &= \left(\sum_m \alpha_{mi}^* a_m \right) \left(\sum_n \alpha_{nj} a_n^+ \right) \pm \left(\sum_n \alpha_{nj} a_n^+ \right) \left(\sum_m \alpha_{mi}^* a_m \right) \\ &= \sum_{m,n} \alpha_{mi}^* \alpha_{nj} a_m a_n^+ \pm \sum_{m,n} \alpha_{mi}^* \alpha_{nj} a_n^+ a_m \\ &= \sum_{m,n} \alpha_{mi}^* \alpha_{nj} [a_m, a_n^+]_{\pm} \\ &= \sum_m \alpha_{mi}^* \alpha_{mj} \mathbb{1}. \end{aligned}$$

L'orthonormalité des deux bases permet alors d'écrire :

$$\delta_{ij} = \langle \tilde{a}_i | \tilde{a}_j \rangle = \sum_{m,n} \langle \varphi_m | \alpha_{mi}^* \alpha_{nj} | \varphi_n \rangle = \sum_{m,n} \alpha_{mi}^* \alpha_{nj} \delta_{mn} = \sum_m \alpha_{mi}^* \alpha_{mj},$$

et finalement $\left[\tilde{a}_i^+, \tilde{a}_j^+ \right]_{\pm} = \delta_{ij} \mathbb{1}$.

3.2 Hamiltonien en opérateurs création et annihilation

a) L'état à deux particules est donné par la fonction d'onde antisymétrique :

$$\psi_{\alpha\beta}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{\alpha}(\vec{x}_1)\varphi_{\beta}(\vec{x}_2) - \varphi_{\alpha}(\vec{x}_2)\varphi_{\beta}(\vec{x}_1)].$$

b) Comme $\{\varphi_k\}$ est une base propre, les seuls éléments de matrice non nuls de \hat{H} s'écrivent :

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} = \left\langle \psi_{\alpha\beta} \left| \hat{H} \right| \psi_{\alpha\beta} \right\rangle &= \int \psi_{\alpha\beta}^*(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \hat{H}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \psi_{\alpha\beta}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int [\varphi_{\alpha}^*(\vec{x}_1)\varphi_{\beta}^*(\vec{x}_2) - \varphi_{\alpha}^*(\vec{x}_2)\varphi_{\beta}^*(\vec{x}_1)] \\ &\quad \times [\hat{t}(\vec{x}_1) + \hat{t}(\vec{x}_2) + \hat{u}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)] \\ &\quad \times [\varphi_{\alpha}(\vec{x}_1)\varphi_{\beta}(\vec{x}_2) - \varphi_{\alpha}(\vec{x}_2)\varphi_{\beta}(\vec{x}_1)] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Finalement, l'expression précédente devient :

$$H_{\alpha\beta} = t_{\alpha\alpha} + t_{\beta\beta} + \frac{1}{2} (u_{\alpha\beta, \alpha\beta} - u_{\alpha\beta, \beta\alpha} + u_{\beta\alpha, \beta\alpha} - u_{\beta\alpha, \alpha\beta}).$$

c) Pour faire apparaître les opérateurs création et annihilation, on introduit le nombre d'occupations n_k dans cette expression. Pour les états fermioniques $n_{\alpha} = n_{\beta} = 1$ et tous les autres n_k sont nuls. On a alors :

$$\left\langle \psi_{\alpha\beta} \left| \hat{H} \right| \psi_{\alpha\beta} \right\rangle = \sum_k n_k t_{kk} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} (u_{kl,kl} - u_{kl,lk}) n_k n_l,$$

et finalement le hamiltonien s'écrit en termes d'opérateurs de création et d'annihilation :

$$\hat{H} = \sum_k t_{kk} c_k^+ c_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} (u_{kl,kl} - u_{kl,lk}) c_k^+ c_k c_l^+ c_l.$$

Chapitre 4

4.1 Lagrangien de Klein-Gordon et de Dirac

En n'utilisant que les coordonées covariantes, le lagrangien de Klein-Gordon est :

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi \partial_0 \varphi - \partial_1 \varphi \partial_1 \varphi - \partial_2 \varphi \partial_2 \varphi - \partial_3 \varphi \partial_3 \varphi - m^2 \varphi^2).$$

a) En traitant séparément la coordonnée temporelle :

- Pour $v = 0$: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi = \partial^0 \varphi$.
- Pour $v = n = 1, 2, 3$: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_n \varphi)} = -\partial_n \varphi = \partial^n \varphi$.

D'où le résultat final : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} = \partial^\nu \varphi$.

b) On calcule les différents termes de l'équation d'Euler-Lagrange :

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m^2 \varphi$
- $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial_\mu \partial^\mu \varphi$.

D'où l'équation du mouvement :

$$-m^2 \varphi - \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0 \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi = 0.$$

Comme attendu, on retrouve l'équation de Klein-Gordon.

c) Le lagrangien de Dirac $\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$ ne dépend que de $\bar{\psi}$ et pas de $\partial_\mu \psi$. On a alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$$

ce qui correspond à l'équation de Dirac

d) On obtient l'équation pour $\bar{\psi}$ en déterminant Euler-Lagrange par rapport à ψ . Alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = i\bar{\psi} \gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -m\bar{\psi}$$

Soit finalement :

$$-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0$$

Cette équation correspond à l'équation de Dirac à laquelle on applique l'opération $-$ (complexe conjugué et produit par γ^0).

4.2 Densité et quantification du champ scalaire

- a) qj^0 est la densité de charge donc l'intégrale sur l'espace doit donner la charge totale.
- b) Par analogie avec le cas classique, on a :

$$j^0 = i(\varphi^+ \partial_0 \varphi - \varphi \partial_0 \varphi^+)$$

où on a ignoré la constante de normalisation, sans intérêt ici, et

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a_k^+ e^{ikx} + b_k e^{-ikx}), \\ \partial_0 \varphi &= \frac{-i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k \frac{E_k}{\sqrt{2E_k}} (a_k e^{-ikx} - b_k^+ e^{ikx}), \\ \varphi &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (a_k e^{-ikx} + b_k^+ e^{ikx}), \\ \partial_0 \varphi^+ &= \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3 k \frac{E_k}{\sqrt{2E_k}} (a_k^+ e^{ikx} - b_k e^{-ikx}). \end{aligned}$$

Soit :

$$j^0 = \frac{i}{(2\pi)^3} \iint d^3 k d^3 q \frac{-i}{2\sqrt{E_k E_q}} \left[\begin{array}{l} E_k (a_k^+ a_q - b_k^+ b_q) e^{i(k-q)x} \\ - E_k (a_k^+ b_q^+ - b_k^+ a_q^+) e^{i(k+q)x} \\ + E_q (b_k a_q - a_k b_q) e^{-i(k+q)x} \\ - E_q (b_k b_q^+ - a_k a_q^+) e^{-i(k-q)x} \end{array} \right].$$

L'intégration spatiale des exponentielles donne $\int e^{iqx} d^3 x = (2\pi)^3 \delta(q)$ et l'intégration sur dq fait disparaître les distributions de Dirac en fixant $q = k$ ou $q = -k$ selon les cas. Comme les opérateurs a et b commutent et que l'on somme sur toutes les impulsions, il reste finalement :

$$\hat{Q} = \frac{q}{2} \int d^3 k (a_k^+ a_k + a_k a_k^+ - b_k^+ b_k - b_k b_k^+).$$

- c) On note $\hat{n}_k = a_k^+ a_k$ le nombre de particules et $\hat{m}_k = b_k^+ b_k$ le nombre d'antiparticules. On a alors :

$$\hat{Q} = q \int d^3 k (\hat{n}_k - \hat{m}_k).$$

- d) On trouve bien le résultat souhaité : la charge totale est égale à la somme sur tous les états des charges des particules (qn_k) et des antiparticules ($-qm_k$). On peut ajouter ou supprimer du système une paire particule-antiparticule sans modifier \hat{Q} . C'est cette conservation qui remplace l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde en théorie quantique des champs. Si on avait utilisé des relations d'anticommutation, on aurait obtenu $\hat{Q} = 0$ soit une charge nulle, indépendante du nombre de particules ce qui est absurde. Un système de particules de spin 0 est un système de bosons.

4.3 Connection spin-statistique pour le spin 1/2

- a) Le calcul est très similaire à celui de l'exercice précédent :

$$\psi^+ H_f \psi = i \psi^+ \partial_0 \psi = \frac{i}{(2\pi)^3} \iint d^3 k d^3 q \sum_{s=1,2} \sum_{r=1,2} \frac{-i}{2\sqrt{E_k E_q}} \left[\begin{array}{l} u_{k,s}^+ u_{q,r} E_k (b_{k,s}^+ b_{q,r}) e^{i(k-q)x} \\ - E_k u_{k,s}^+ v_{q,r} (b_{k,s}^+ d_{q,r}^+) e^{i(k+q)x} \\ + E_q v_{k,s}^+ u_{q,r} (d_{k,s} b_{q,r}) e^{-i(k+q)x} \\ - E_q v_{k,s}^+ v_{q,r} (d_{k,s} d_{q,r}^+) e^{-i(k-q)x} \end{array} \right].$$

On réalise d'abord l'intégration spatiale puis l'intégrale sur $d^3 q$. Enfin on utilise les relations de normalisation sur les spineurs pour faire disparaître la sommation sur s et r . Finalement :

$$\mathcal{H} = \int d^3 k \sum_s E_k (b_{k,s}^+ b_{k,s} - d_{k,s} d_{k,s}^+).$$

- b) On note $\hat{n}_k = b_k^+ b_k$ le nombre de particules et $\hat{m}_k = d_k^+ d_k$ le nombre d'antiparticules. On a alors :

$$\mathcal{H} = \int d^3k E_k (\hat{n}_k + \hat{m}_k - 1).$$

- c) Si on oublie la constante infinie, l'énergie totale est la somme sur tous les états de l'énergie pondérée par le nombre total de particules et d'antiparticules dans cet état, ce qui est attendu. En particulier cette énergie est bien positive.
- d) Avec des règles de commutation, on obtiendrait $\mathcal{H} = \int d^3k E_k (\hat{n}_k - \hat{m}_k - 1)$ qui n'est pas toujours positif. La quantification d'un champ de spin 1/2 nécessite des relations d'anticommutation pour que l'énergie ait un sens physique. Un tel champ décrit un système de fermions.

4.4 Représentation de Weyl

- a) En représentation de Weyl, les trois matrices γ^i sont les même qu'en représentation standard. Il suffit donc de vérifier les relations avec γ^0 :

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$$

et

$$\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

- b) En injectant la solution en onde plane dans l'équation de Dirac, il vient :

$$(\gamma_\mu k^\mu - m) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

soit en explicitant les matrices de Dirac :

$$\begin{pmatrix} -m & k^0 + k^i \sigma_i \\ k^0 - k^i \sigma_i & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0.$$

On en déduit alors le résultat demandé :

$$\varphi = \frac{k^0 + k^i \sigma_i}{m} \chi, \text{ et } \chi = \frac{k^0 - k^i \sigma_i}{m} \varphi.$$

- c) Sous l'effet de la parité, \vec{k} change aussi de signe. Le produit $k^\mu x_\mu$ est alors invariant et l'exponentielle n'est pas affectée. En appliquant la parité aux deux relations précédentes, on obtient :

$$\tilde{\chi} = \frac{k^0 + k^i \sigma_i}{m} \tilde{\varphi}, \text{ et } \tilde{\varphi} = \frac{k^0 - k^i \sigma_i}{m} \tilde{\chi}$$

d'où

$$\tilde{\chi}_w = P \chi_w = \varphi_w \text{ et } \tilde{\varphi}_w = P \varphi_w = \chi_w.$$

Chapitre 5

5.1 Analyse dimensionnelle

Dans le système d'unités naturelles, toutes les dimensions s'expriment en puissance de l'énergie. Ainsi, temps et espace sont homogènes à l'inverse d'une énergie : $T = L = E^{-1}$.

- a) La dimension d'une densité lagrangienne est $[\mathcal{L}] = EL^{-3} = E^4$. En partant du lagrangien de Klein-Gordon :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \Rightarrow E^4 = [\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi] = [\partial_\mu]^2 [\varphi]^2,$$

avec $[\partial_\mu] = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right] = E$. On en déduit la dimension d'un champ scalaire $[\varphi] = E$. On vérifie que la masse m est également homogène à une énergie.

En utilisant le lagrangien de Dirac :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \Rightarrow E^4 = [\partial_\mu][\psi]^2 = E[\psi]^2,$$

d'où la dimension du champ spinoriel $[\psi] = E^{\frac{3}{2}}$.

Enfin, le lagrangien de Maxwell donne :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \Rightarrow E^4 = [\partial_\mu]^2 [A_\mu]^2 = E^2 [A_\mu]^2.$$

Comme le champ scalaire, le champ vectoriel à la dimension d'une énergie $[A_\mu] = E$.

- b) Les produits dans le langrangien ne peuvent dépasser la dimension de la densité lagrangienne, soit E^4 . Les seuls termes invariants de jauge pour un champ scalaire sont donc φ^2 et φ^4 .

- c) Les combinaisons de champs possibles sont :

- scalaires seuls : 2 scalaires ($m^2 \varphi^2$, terme de masse), 3 scalaires (autocouplage à 3 bosons de Higgs), 4 scalaires ($\lambda \varphi^4$: autocouplage à 4 bosons de Higgs),
- spineurs seuls : 2 spineurs ($m \bar{\psi} \psi$, terme de masse),
- vecteurs seuls : 2 vecteurs (terme de masse), 3 et 4 vecteurs (termes d'autocouplage des gluons),
- scalaire-fermion : 2 spineurs et 1 scalaire ($\lambda \bar{\psi} \psi \varphi$, couplage de Yukawa),
- scalaire-vecteur : 1 scalaire et 2 vecteurs ($A_\mu A^\mu \varphi$, couplage entre Higgs et boson de jauge), 2 scalaires et 2 vecteurs,
- vecteur-spineur : 2 spineurs et 1 vecteur ($\bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$, couplage de jauge).

Les autres combinaisons dimensionnellement autorisées violent la conservation du spin (un spinor et deux vecteurs, par exemple) ou ne permettent pas de construire un scalaire de Lorentz (un scalaire et un vecteur).

5.2 Équations de Maxwell

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

On rappelle que les champs et leurs dérivées se comportent comme des variables indépendantes.

a) Seul le terme d'interaction $-g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ dépend du champ A_μ . On a alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = j^\mu.$$

b) Les dérivées n'interviennent que dans le terme $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

En explicitant les sommes, il vient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \left(\sum_{\alpha, \beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \right).$$

Le calcul de la dérivée n'est pertinent que pour $\mu \neq \nu$, puisque $F^{\mu\mu} = F_{\mu\mu} = 0$. Seuls les termes de la somme contenant $\partial_\mu A_\nu$ ou $\partial^\mu A^\nu$ auront une dérivée non nulle :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - 2\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu).$$

Faire monter ou descendre les indices μ et ν peut changer le signe, pour ne pas détailler les cas spécifiques, on notera simplement $\partial^\mu A^\nu = k\partial_\mu A_\nu$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu &= k(\partial_\mu A_\nu)^2 & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu &= 2k\partial_\mu A_\nu = 2\partial^\mu A^\nu, \\ \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu &= k\partial_\nu A_\mu \partial_\mu A_\nu & \Rightarrow \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu &= k\partial_\nu A_\mu = \partial^\nu A^\mu, \\ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu &= \partial^\nu A^\mu, \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = -F^{\mu\nu}.$$

c) En regroupant les deux questions précédentes, il vient :

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu.$$

d) La matrice γ^0 vérifie $\gamma^0\gamma^0 = \mathbb{1}$. On a alors :

$$-\frac{1}{g}j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^+\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^+\psi.$$

On a vu au chapitre 3 que $\psi^+\psi$ pouvait s'interpréter comme l'opérateur densité de particules.

- e) En l'absence d'interaction, l'équation d'Euler-Lagrange pour le champ électromagnétique donne les équations de Maxwell sans source :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases}$$

Avec le terme d'interaction, il vient :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = gj^\nu \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = j^0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}. \end{cases}$$

Pour retrouver les équations de Maxwell, il faut que j^0 soit la densité de charges. Le terme $\bar{\psi} \gamma^0 \psi$ étant la densité de particules, la constante de couplage g doit être la charge de l'électron $g = e$. Le vecteur \vec{j} s'interprète alors comme le courant et le quadrivecteur j^μ est le quadri-courant.

5.3 Projecteurs de chiralité

- a) En explicitant les matrices de Dirac :

$$\gamma^5 = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Les fonctions d'onde spinorielles pour la particule sont :

$$\gamma^5 \psi_{\frac{1}{2}}^{(+)} = \sqrt{\frac{m + E_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-ikx} = \sqrt{\frac{m + E_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}$$

et

$$\gamma^5 \psi_{-\frac{1}{2}}^{(+)} = \sqrt{\frac{m + E_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-ikx} = \sqrt{\frac{m + E_k}{2E_k}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ikx}.$$

Pour tout spinor en représentation standard, $\gamma^5 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}$: la matrice γ^5 inverse les composantes haute et basse. Finalement :

$$\gamma^5 \psi_{\frac{1}{2}}^{(+)} = \psi_{\frac{1}{2}}^{(+)} \text{ et } \gamma^5 \psi_{-\frac{1}{2}}^{(+)} = -\psi_{-\frac{1}{2}}^{(+)}.$$

- c) Un projecteur est un opérateur qui doit vérifier $\Lambda^2 = \Lambda$. Comme $(\gamma^5)^2 = 1$, ce résultat est vérifié pour Λ^+ et Λ^- . De plus :

$$\Lambda^+ \psi_{\frac{1}{2}}^{(+)} = \psi_{\frac{1}{2}}^{(+)}, \quad \Lambda^+ \psi_{-\frac{1}{2}}^{(+)} = 0, \quad \Lambda^- \psi_{\frac{1}{2}}^{(+)} = 0, \quad \Lambda^- \psi_{-\frac{1}{2}}^{(+)} = \psi_{\frac{1}{2}}^{(+)}.$$

Ces opérateurs projettent bien sur un état d'hélicité particulier.

d) La matrice γ^5 devient alors :

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et les opérateurs de projection de chiralité :

$$\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Appliqués à un spinor en représentation de Weyl, Λ^+ et Λ^- permettent d'isoler les composantes hautes et basses du spinor :

$$\Lambda^+ \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Lambda^- \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

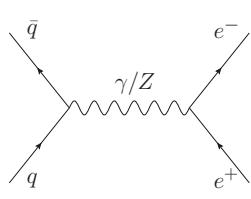
Les spineurs à deux composantes $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\chi}$ sont des spineurs de Weyl. Ce sont des états propres de chiralité.

e) On a vu précédemment que les spineurs de Weyl étaient symétriques par parité. La violation de parité va donc se traduire par un couplage de jauge différent aux composantes gauche et droite des spineurs. Pour une interaction de jauge avec un boson Z^μ violant la parité, le lagrangien doit faire apparaître séparément $\frac{1+\gamma_5}{2}\psi$ et $\frac{1-\gamma_5}{2}\psi$. En développant, il apparaît donc deux termes dans le lagrangien $g_1\bar{\psi}\gamma_\mu Z^\mu\psi$ et $g_2\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 Z^\mu\psi$ avec deux constantes de couplage g_1 et g_2 .

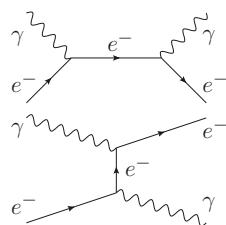
Chapitre 6

6.1 Diagrammes de Feynman

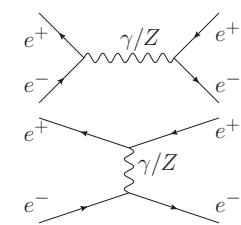
a) $q\bar{q} \rightarrow e^+e^-$



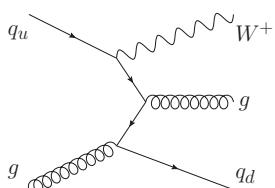
b) $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$



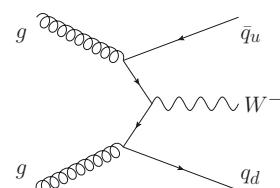
c) $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$



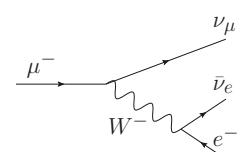
d) $qg \rightarrow W q' g$



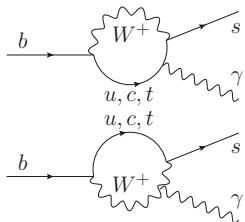
e) $gg \rightarrow W q\bar{q}'$



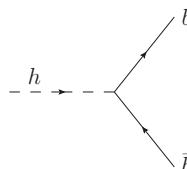
f) $\mu^- \rightarrow e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$



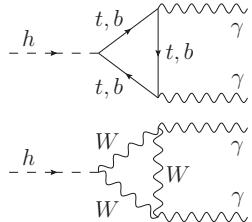
g) $b \rightarrow s\gamma$



h) $h \rightarrow b\bar{b}$



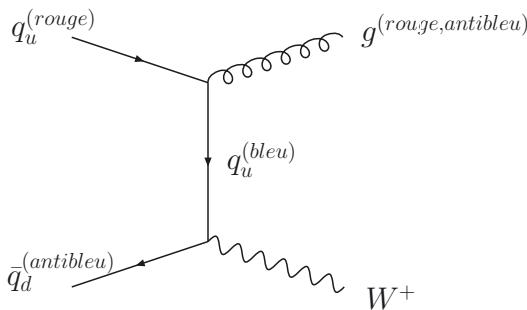
i) $h \rightarrow \gamma\gamma$



Les diagrammes g) et i) n'existent pas au premier ordre car il n'existe pas de terme dans le lagrangien qui couple des quarks de saveurs différentes au photon ($b \rightarrow s\gamma$) ou qui couple le boson de Higgs au photon ($h \rightarrow \gamma\gamma$). Il faut donc passer par des boucles de particules et les diagrammes les plus simples nécessitent trois vertex.

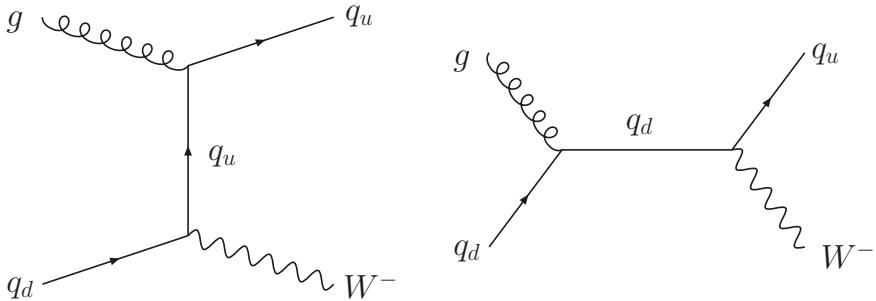
6.2 Processus $W+1$ parton

- a) En notant q_u un quark de type up (u, c, t) de charge $Q = \frac{2}{3}$ et \bar{q}_d un antiquark de type down ($\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}$) de charge $Q = \frac{1}{3}$, l'un des diagrammes est le suivant :



D'autre combinaisons de couleurs sont possibles. Dans le propagateur vertical, la particule peut s'interpréter indifféremment comme un quark qui descend ou un antiquark qui remonte. Dans une collisions proton-proton ou proton-antiproton, c'est le diagramme $u\bar{d} \rightarrow gW^+$ qui est dominant.

- b) Le vertex de production du gluon fait intervenir l'interaction forte. Il est donc proportionnel à $\sqrt{\alpha_s}$. Le boson W^+ est produit via l'interaction faible et le vertex est proportionnel à $\sqrt{\alpha_w}$. Au final : $\mathcal{M}_{fi} \propto \sqrt{\alpha_s \alpha_w}$.
- c) Il existe deux diagrammes pour le processus $qg \rightarrow W^- q'$:



- d) Pour tous ces diagrammes, $\mathcal{M}_{fi} \propto \sqrt{\alpha_s \alpha_w}$, donc :

$$\sigma \propto |\mathcal{M}_{fi}|^2 \propto \alpha_s \alpha_w.$$

- e) Chaque parton (quark ou gluon) supplémentaire va faire intervenir un nouveau vertex fort. Donc :

$$\sigma_{W+n \text{ partons}} \propto \alpha_s^n \alpha_w.$$

On a donc :

$$\frac{\sigma_{W+n \text{ partons}}}{\sigma_{W+1 \text{ parton}}} \approx \alpha_s^{n-1}.$$

En considérant que $\alpha_s \sim 0,1$, on conclut que la section efficace est réduite d'un ordre de grandeur par parton supplémentaire. Ces processus de production associée d'un boson W avec des quarks ou des gluons constituent l'un des bruits de fonds dominant dans les collisionneurs hadroniques.

6.3 Désintégrations du boson de Higgs

- a) Les différents objets apparaissant dans le lagrangien sont :

- x : coordonnées d'espace-temps,
- λ_f : couplage de Yukawa entre le boson de Higgs et le fermion,
- v : valeur dans le vide du champ de Higgs,
- $h(x)$: champ scalaire réel du boson de Higgs,
- $\psi_f, \bar{\psi}_f$: champ spinoriel du fermion.

- b) En développant le lagrangien :

$$\mathcal{L} = -\lambda_f v \bar{\psi}_f \psi_f(x) - \lambda_f \bar{\psi}_f \psi_f h.$$

Le second terme traduit le couplage Higgs-fermion, qui est proportionnel à λ_f . Le premier a la forme d'un terme de masse $-m_f \bar{\psi} \psi$ avec $m = \lambda_f v$. Le couplage Higgs-fermion est donc :

$$\lambda_f = \frac{m_f}{v} \propto m_f.$$

- c) L'ordre le plus bas du développement perturbatif est constitué des diagrammes à un unique vertex. Pour un boson de Higgs, les seules désintégrations possibles seront

en paire de fermions (via un couplage de Yukawa) ou en paire de bosons massifs (via un couplage de jauge). Pour que la désintégration soit cinématiquement autorisée, la masse de la particule fille doit être inférieure à la moitié de la masse du Higgs : $h \rightarrow f\bar{f}$ pour $2m_f < m_h$, soit $m_f < 63$ GeV. Seules les désintégrations en paire de fermions massifs, quarks tops exceptés, sont alors possibles :

$$h \rightarrow b\bar{b}, c\bar{c}, s\bar{s}, u\bar{u}, d\bar{d}, \tau^+\tau^-, \mu^+\mu^-, e^+e^-.$$

Le diagramme de Feynman est donné dans la solution de l'exercice 6.1, question h).

- d) Le couplage de Yukawa est proportionnel à la masse du fermion, donc $\Gamma_{h \rightarrow ff} \propto m_f^2$. De plus, pour une désintégration en quarks, il faut prendre en compte l'existence de trois états de couleur. Finalement :

$$R_{h \rightarrow b\bar{b}} \approx \frac{3m_b^2}{3m_b^3 + 3m_c^3 + m_\tau^2} \approx 87\%,$$

et

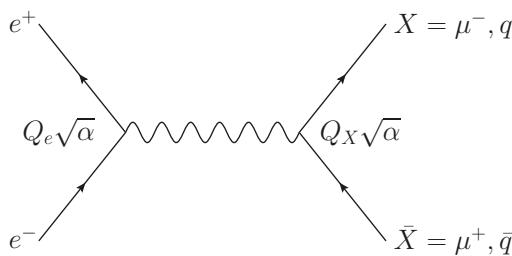
$$R_{h \rightarrow \tau^+\tau^-} \approx \frac{m_\tau^2}{3m_b^3 + 3m_c^3 + m_\tau^2} \approx 4\%,$$

en négligeant les contributions des particules de masses inférieures dans le dénominateur ($m_s, m_d, m_u, m_\mu, m_e \ll m_c$). On trouve le bon ordre de grandeur, en particulier la désintégration en paires de quarks b est dominante. Néanmoins le calcul complet est plus complexe et les désintégrations via un état virtuel WW^* ou ZZ^* ont une contribution significative à la largeur de désintégration du boson de Higgs.

Chapitre 7

7.1 Rapport R

Le diagramme de Feynman type de ce processus est :



- a) Pour $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, \sigma \propto |\mathcal{M}_{fi}|^2 \propto Q_e^2 Q_\mu^2 \alpha^2 = \alpha^2$.

- b) Pour $e^+e^- \rightarrow u\bar{u}$, il y a autant de diagrammes qu'il y a de couleurs : $e^+e^- \rightarrow u_r\bar{u}_r$, $e^+e^- \rightarrow u_b\bar{u}_b, \dots$ Tous les états finaux sont différents : il n'y a pas d'interférence et les carrés des éléments de matrice s'ajoutent. Ainsi :

$$\sigma_{e^+e^-\rightarrow u\bar{u}} = \sigma_{e^+e^-\rightarrow u_r\bar{u}_r} + \sigma_{e^+e^-\rightarrow u_b\bar{u}_b} + \dots = N_c \sigma_{e^+e^-\rightarrow u_r\bar{u}_r}.$$

Pour chaque couleur de quark, $|\mathcal{M}_{fi}|^2 \propto Q_e^2 Q_u^2 \alpha^2 \propto \frac{4}{9} \alpha^2$. La section efficace totale de production de paires $u\bar{u}$ est donc :

$$\sigma_{e^+e^-\rightarrow u\bar{u}} = \frac{4N_c}{9} \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

- c) On raisonne de même pour la production de $d\bar{d}$, seule la charge électrique du quark change, ainsi :

$$\sigma_{e^+e^-\rightarrow d\bar{d}} = \frac{N_c}{9} \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

Le résultat est identique pour les productions de paires $s\bar{s}$ et $b\bar{b}$.

- d) Le rapport R vaut alors :

$$\frac{N_u \sigma_{u\bar{u}} + N_d \sigma_{d\bar{d}}}{\sigma_{\mu\mu}} = \frac{N_c}{9} (4N_u + N_d).$$

- e) Pour $\sqrt{s} = 2$ GeV, seuls les quarks u , d et s sont accessibles soit $N_u = 1$ et $N_d = 2$. On a alors :

$$R = \frac{2}{3} N_c \rightarrow N_c \approx 3,3.$$

Quand on dépasse $m_{J/\psi} \approx 3,1$ GeV, le quark c s'ajoute aux précédents et $N_u = 2$. Alors :

$$R = \frac{10}{9} N_c \rightarrow N_c \approx 3,06.$$

Ces calculs négligent les effets correctifs des ordres supérieurs du développement perturbatif et on peut conclure que le nombre de couleurs est $N_c = 3$, ce qui est attendu en chromodynamique quantique.

7.2 Formule de masse des mésons

- a) Pour une particule au repos $\mathcal{H} = -\mathcal{L}_{masse}$. Le terme de masse dans le lagrangien de Dirac est $\mathcal{L}_{masse} = -m\bar{\psi}\psi$ alors que dans le lagrangien de Klein-Gordon $\mathcal{L}_{masse} = -m^2\varphi^2$. Ainsi, pour des bosons scalaires au repos, $\langle \mathcal{H} \rangle = m^2$.
- b) On applique le même raisonnement qu'au paragraphe 1.5, en remplaçant chaque particule de l'octet des baryons par celle correspondante dans l'octet des mésons scalaires :

$$n \rightarrow K^0, \quad \Xi^0 \rightarrow \bar{K}^0, \quad \Lambda \rightarrow \eta, \quad \Sigma^0 \rightarrow \pi^0.$$

et les masses par des masses au carré. La formule de masse est alors :

$$2(m_{K^0}^2 + m_{\bar{K}^0}^2) = 4m_{K^0}^2 = 3m_\eta^2 + m_{\pi^0}^2.$$

- c) On calcule :

$$m_{K^0} = \frac{1}{2} \sqrt{3m_\eta^2 + m_{\pi^0}^2} \approx 479 \text{ MeV.}$$

La valeur mesurée est $m_{K^0} = 498$ MeV, soit un écart de moins de 4%, qui est satisfaisant compte tenu des approximations réalisées.

7.3 Échelle d'énergie de QCD

On définit la grandeur :

$$\Lambda_{QCD} = \mu e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu)\beta}}.$$

- a) L'équation d'évolution permet de relier deux échelles d'énergies μ et ν par :

$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\nu)}{1 + \frac{\alpha_s(\nu)\beta}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{\nu^2}}.$$

On a alors :

$$\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu)\beta} = \frac{2\pi}{\alpha_s(\nu)\beta} \left(1 + \frac{\alpha_s(\nu)\beta}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{\nu^2} \right) = \frac{2\pi}{\alpha_s(\nu)\beta} + \ln \frac{\mu}{\nu},$$

soit :

$$\Lambda_{QCD} = \mu e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\mu)\beta}} = \mu e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\nu)\beta}} \frac{\nu}{\mu} = \nu e^{-\frac{2\pi}{\alpha_s(\nu)\beta}}.$$

Λ_{QCD} ne dépend pas de l'échelle d'énergie.

- b) Pour $\mu = \Lambda_{QCD}$,

$$\frac{\alpha_s(\mu)\beta}{4\pi} \ln \frac{\Lambda_{QCD}^2}{\mu^2} = -1,$$

donc le dénominateur dans l'équation d'évolution est nul et la constante de couplage diverge. Quand une divergence apparaît dans un modèle physique, c'est que ce modèle n'est plus valide quand on approche la région divergente. Au voisinage de Λ_{QCD} , l'interaction forte n'est plus perturbative et l'équation d'évolution du couplage n'est plus adaptée.

- c) En prenant $\alpha_s(m_Z) = 0,118$, on trouve $\Lambda_{QCD} \approx 87$ MeV. Néanmoins cette valeur n'est qu'un ordre de grandeur puisqu'elle est estimée à l'aide d'une formule qui n'est plus valable à cette échelle d'énergie. En fait, on détermine expérimentalement que $\Lambda_{QCD} \approx 200$ MeV. C'est l'échelle d'énergie qui sépare les deux régimes de QCD, perturbatif et non perturbatif.

Chapitre 8

8.1 Expérience OPERA

- a) L'amplitude est maximale quand $\sin^2 \frac{1,27\delta m^2 x}{E} = 1$. On atteint 5% du maximum si :

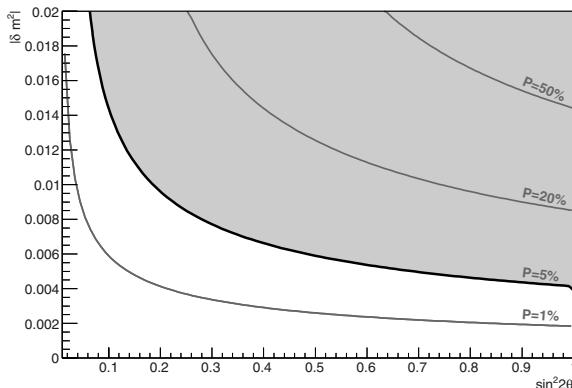
$$\sin^2 \frac{1,27\delta m^2 x}{E} > 0,05 \Rightarrow |\delta m^2| > \frac{E}{1,27x} \arcsin \sqrt{0,05}.$$

L'application numérique donne $\delta m^2 = 4,1 \times 10^{-3}$ eV².

- b) Le résultat précédent correspond au cas le plus favorable où $\sin^2 2\theta = 1$. En incluant l'angle de mélange :

$$\sin^2 2\theta \sin^2 \frac{1,27\delta m^2 x}{E} > 0,05 \Rightarrow |\delta m^2| > \frac{E}{1,27x} \arcsin \sqrt{\frac{0,05}{\sin^2 2\theta}}.$$

La zone correspondante dans le plan $(\sin^2 2\theta, \delta m^2)$ est indiquée en gris sur la figure suivante :



Les limites pour 1%, 20% et 50% de probabilité sont également indiquées. Cette zone donne une idée de la sensibilité de l'expérience OPERA.

- c) Le maximum d'oscillation est atteint pour :

$$\sin^2 \frac{1,27\delta m^2 x_{max}}{E} = 1 \Rightarrow \frac{1,27\delta m^2 x_{max}}{E} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{max} = \frac{\pi E}{2,54\delta m^2}.$$

Soit pour des neutrinos de 17 GeV, $x_{max} = 8761$ km, ce qui est très supérieur à la distance de 730 km. On peut néanmoins argumenter que plus on s'éloigne de la source, plus le faisceau de neutrinos va s'élargir, réduisant le flux d'un facteur $\propto \frac{1}{x^2}$: il peut être plus intéressant d'être loin du maximum d'oscillation si l'acceptance du détecteur est plus élevée.

- d) À distance identique, $x_{max} \propto E$, donc en réduisant l'énergie on réduit la période d'oscillation. La probabilité de changement de saveur est plus grande pour MINOS que pour OPERA.

8.2 Énergie manquante et neutrino

- a) La conservation de l'impulsion dans le référentiel du laboratoire impose :

$$\sum \vec{p}^{\text{initiaux}} = \sum \vec{p}^{\text{finaux}}.$$

Les partons ont une impulsion nulle selon x et y , donc pour les particules finales :

$$\sum p_x^{\text{finaux}} = \sum p_y^{\text{finaux}} = 0.$$

Dans la direction des faisceaux de protons,

$$\sum p_z^{\text{initiaux}} = (x_1 - x_2)p,$$

où $p \approx E$ est l'impulsion de chacun des faisceaux. L'impulsion selon z dépend de la fraction d'impulsion portée par chaque parton, qui est inconnue.

- b) Si toutes les particules sauf le neutrino sont mesurées, on a :

$$0 = \sum p_{x,i} = \sum p_{x,i}^{\text{mes}} + p_x^{\nu} \Rightarrow p_x^{\nu} = - \sum p_{x,i}^{\text{mes}} = \not{E}_x.$$

De même, $p_y^{\nu} = \not{E}_y$: l'énergie transverse manquante s'interprète comme l'impulsion transverse du neutrino.

- c) S'il y a deux neutrinos, alors $\not{E}_x = p_x^{\nu_1} + p_x^{\nu_2}$ et $\not{E}_y = p_y^{\nu_1} + p_y^{\nu_2}$. Il n'est pas possible de déterminer l'impulsion de chaque neutrino à partir des grandeurs mesurées.
- d) On calcule les composantes de l'énergie manquante :

$$p_{x,\nu} = \not{E}_x = -p_{x,\mu} - p_{x,j} = -43,7 \text{ GeV},$$

$$p_{y,\nu} = \not{E}_y = -p_{y,\mu} - p_{y,j} = -25,3 \text{ GeV},$$

et pour l'énergie transverse manquante, $\not{E}_T \approx 50,5 \text{ GeV}$.

- e) La masse du boson W s'écrit :

$$m_W^2 = (E_{\mu} + E_{\nu})^2 - (p_{x,\mu} + \not{E}_x)^2 - (p_{y,\mu} + \not{E}_y)^2 - (p_{z,\mu} + \mathbf{p}_{z,\nu})^2.$$

En utilisant la masse du neutrino :

$$m_{\nu}^2 = 0 = E_{\nu}^2 - \not{E}_x^2 - \not{E}_y^2 - p_{z,\nu}^2 \Rightarrow E_{\nu}^2 = \not{E}_T^2 + \mathbf{p}_{z,\nu}^2.$$

on obtient pour la masse du boson W :

$$m_W^2 = (E_{\mu} + \sqrt{\not{E}_T^2 + \mathbf{p}_{z,\nu}^2})^2 - (p_{x,\mu} + \not{E}_x)^2 - (p_{y,\mu} + \not{E}_y)^2 - (p_{z,\mu} + \mathbf{p}_{z,\nu})^2.$$

- f) Pour résoudre cette équation, on développe une partie des carrés et on isole la racine carrée :

$$2E_{\mu} \sqrt{\not{E}_T^2 + \mathbf{p}_{z,\nu}^2} = m_W^2 + 2p_{x,\mu} \not{E}_x + 2p_{y,\mu} \not{E}_y + 2p_{z,\mu} \mathbf{p}_{z,\nu}.$$

avec :

$$A = 4(p_{z,\mu}^2 - E_{\mu}^2) \approx -4660,88 \text{ GeV}^2,$$

$$B = 4p_{z,\mu} (m_W^2 + 2p_{x,\mu} \not{E}_x^2 + 2p_{y,\mu} \not{E}_y^2) \approx -555766 \text{ GeV}^3,$$

$$C = (m_W^2 + 2p_{x,\mu} \not{E}_x + 2p_{y,\mu} \not{E}_y)^2 - 4E_{\mu}^2 \not{E}_T^2 \approx -8132222 \text{ GeV}^4.$$

Cette équation admet deux solutions :

$$p_{z,v}^1 \approx -102,2 \text{ GeV} \text{ et } p_{z,v}^2 \approx -17,1 \text{ GeV}.$$

Il reste donc une ambiguïté puisqu'il existe deux solutions physiquement admissibles. Il faudrait ajouter une contrainte cinématique supplémentaire pour déterminer la bonne valeur de $p_{z,v}$.

Bibliographie

Il existe de nombreux ouvrages, la plupart en anglais, traitant de manière complète et rigoureuse les différents concepts développés dans le présent ouvrage. La liste suivante constitue une petite sélection à laquelle le lecteur curieux d'approfondir ces sujets pourra se référer :

Mécanique quantique

COHEN-TANNOUDJI C., DIU B. ET LALOË F., *Mécanique Quantique, I et II*, Hermann (1973)

GREINER W. , *Quantum Mechanics : An Introduction*, Springer (2001)

GREINER W. , *Quantum Mechanics : Special Chapters*, Springer (1998)

MESSIAH A. , *Mécanique Quantique, tomes 1 et 2*, Dunod (1999)

Mécanique analytique et relativité

LANDAU L. ET LIFCHITZ E., *Physique théorique : Mécanique*, Ellipses (1994)

LANDAU L. ET LIFCHITZ E., *Physique théorique : Théorie des champs*, Ellipses (1994)

Théorie quantique des champs

DERENDINGER J.-P., *Théorie Quantique des Champs*, Presses polytechniques et universitaires romandes (2001)

GREINER W., *Relativistic Quantum Mechanics : Wave Equations*, Springer (2000)

GREINER W. ET REINHARDT J., *Field Quantization*, Springer (1996)

PESKIN M.E. ET SCHROEDER D.V., *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press Inc. (1995)

Physique des particules

GREINER W. ET MÜLLER B., *Quantum Mechanics : Symmetries*, Springer (1994)

GREINER W. ET REINHARDT J., *Quantum Electrodynamics*, Springer (2003)

GREINER W. ET MÜLLER B., *Gauge Theory of Weak Interaction*, Springer (2000)

GREINER W., SCHRAMM S. ET STEIN E., *Quantum Chromodynamics*, Springer (2002)

HALZEN F. ET MARTIN A.D., *Quarks and Leptons : An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley and Sons (1984)

KLASEN M., *Mécanique Quantique Relativiste*, Dunod (2009)

PERKINS D.E., *Introduction to High Energy Physics*, Cambridge University Press (2000)

SMADJA G. ET CHANFRAY M., *Les Particules et leurs Symétries*, Masson (1997)

Index

A

amplitude de Feynman, 98
anticommutateur, 47, 70
antiparticule, 7, 114

B

baryon, 8, 113, 120
boson de Higgs, 80, 95, 105, 141
bosons faibles, 9, 79, 103

C

champ
 classique, 28
 quantifié, 50, 68
 scalaire, 56, 67, 79
 spinoriel, 59, 67, 70
 vectoriel, 64, 67, 77
commutateur, 32, 46, 69
constante
 de couplage, 77, 82, 94, 107, 124
 de Plank, 4, 30
couleur, 9, 124
courants
 chargés, 10, 85, 103, 123
 neutres, 10, 103, 123

D

désintégration β , 9, 84
dérivée covariante, 77, 83
désintégration, 95
diagramme de Feynman, 98, 127
diffusion, 91

E

échelle d'énergie, 3, 106, 126
équation
 d'Euler-Lagrange, 25, 29
 de Dirac, 59, 70
 de Klein-Gordon, 6, 56
 de Maxwell, 66
 de Schrödinger, 33, 135
espace de Fock, 44
étrangeté, 116, 120

F

fonction d'onde, 31, 41, 50

G

gluon, 9, 102, 126

H

hadron, 8, 113
hadronisation, 125
hamiltonien, 26, 49, 89, 115, 134
Heisenberg (inégalité), 31, 100
hélécité, 84

I

interaction
 électromagnétique, 2, 66, 77, 86, 102
 faible, 2, 9, 84, 86, 103
 forte, 2, 8, 102, 108, 125
 gravitationnelle, 2, 68, 143
invariance, 20, 27, 34, 55, 77, 115
isospin fort, 114

L

lagrangien, 24
 d'interaction, 76, 92
 de Dirac, 64, 76
 de Klein-Gordon, 56, 79
 de Maxwell, 77
 de Yukawa, 81, 95
largeur, 93
leptoquark, 145

M

mécanique
 analytique, 24
 quantique, 30, 56
mécanisme de Higgs, 86
masse, 22, 56, 66, 67, 78, 81, 118, 134
matière noire, 142
matrice
 de diffusion, 91
 de mélange, 104, 133, 136
 de Pauli, 35, 60
mécanisme de Higgs, 79, 105
meson, 8, 113, 121
modèle standard, 2, 10, 86, 102, 141

N

neutrino, 10
atmosphérique, 137
solaire, 132, 137
nombre
baryonique, 8, 114, 121
d'occupation, 44, 51
leptonique, 12

O

opérateur
création et annihilation, 45, 69, 75, 78, 96
d'évolution, 33, 89
de champ, 50, 69
observable, 31, 48
oscillation, 134, 136

P

parité, 84
parton, 125, 126
permutation, 41
photon, 66, 77
pion, 7, 114
propagateur, 100

Q

quadri-impulsion, 22
quadrivecteur, 21
quark, 120, 126

R

renormalisation, 76, 105
représentation
d'interaction, 34, 89
de Heisenberg, 34
de Schrödinger, 34

S

saveur, 12, 84, 103, 120, 133
scalaire de Lorentz, 20, 76
section efficace, 91, 100, 115
série de Dyson, 91
spin, 35, 42, 67, 70, 114
spineur, 67
supersymétrie, 68, 142

T

tour de Kaluza-Klein, 145
transformation
de jauge, 76
de Lorentz, 18

U

unités naturelles, 4

V

vertex, 78, 97, 98